G1984

THE UNIVERSITY

OF ILLINOIS

LIBRARY

5109
G95r

MATHEMATICS
DEPARTMENT

NOTICE: **Return or renew all Library Materials! The *Minimum* Fee for each Lost Book is $50.00.**

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.
To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

SEP 06 1995
SEP 06 1995
JUN 05 RECD

L161—O-1096

VERMISCHTE

UNTERSUCHUNGEN

ZUR

GESCHICHTE

DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

VON

DR. SIEGMUND GÜNTHER.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN
UND 4 LITHOGR. TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

510.9
G95v

DEM MÄCEN

MATHEMATISCH-HISTORISCHER FORSCHUNG

FÜRST BALTHASAR BONCOMPAGNI

IN DANKBARER ERINNERUNG

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

Mathematics Research 8 My '14 Liebisch 96 7 O '14 Z.T.

279365

Vorwort.

Das Buch, welches wir hiermit den Freunden der mathematischen Geschichtsforschung vorlegen, bedarf zu seiner Einführung wohl nur weniger Begleitworte. Jedermann weiss, wie schwierig es unter den obwaltenden Verhältnissen ist, grössere monographische Arbeiten in der periodischen Presse zu publiziren, und wenn auch unsere Spezialdisziplin in Fürst Boncompagni's Bulletin eine vortreffliche Zeitschrift besitzt, so werden doch jene Schwierigkeiten nicht völlig gehoben, denn gewiss ist es an sich wünschenswerth, eine wissenschaftliche Abhandlung nicht in einem fremden sprachlichen Gewande erscheinen zu sehen. So sah sich denn der Verf. veranlasst, eine Reihe von Monographieen, deren Stoff, zum grösseren Theile der reinen zum kleineren der angewandten Mathematik angehörig, im Verlaufe mehrjähriger Studien sich angesammelt hatte, zu einem Ganzen zusammenzufassen und in Gestalt eines Sammelwerkes vor das grössere Publikum zu bringen.

Ebensowenig brauchen wir uns über den Charakter der einzelnen Arbeiten eingehender auszulassen; sie müssen vielmehr für sich selbst sprechen. Man hat es hier mit Bruchstücken zu thun, mit Bruchstücken aber, die bereits soweit zugerichtet sind, um von dem Baumeister, welcher dereinst das Riesenwerk einer wirklichen Geschichte der Mathematik, resp. der induktiven Wissenschaften, in Angriff zu nehmen gedenkt, einfach an ihrem Platze verwendet zu werden. Ueber den Werth solcher historischen Detail-Darstellungen wurde bereits bei einer früheren Gelegenheit (Vorrede zur Habilitationsschrift, Erlangen 1873) das Nöthige gesagt, und es hat sich bisher kein Grund ergeben, die dort präzisirte Anschauung zu modifiziren.

Nur Ein Punkt sei kurz hervorgehoben. Es ist in neuester Zeit mehrfach behauptet worden, die Entwickelung historischer Fakta habe sich streng innerhalb gewisser stylistischer Grenzen zu halten, es sei ein ununterbrochener Gang fortlaufender Erzählung geboten, und vor Allem habe sich der Autor des Gebrauchs der spezifisch-mathematischen Zeichensprache zu enthalten; als Prototyp dieser Auffassung pflegt man das in vielen Beziehungen allerdings klassisch zu nennende Werk Dühring's zu zitiren. Unleugbar liegt hierin viel Wahres; wolle man aber andererseits auch nicht vergessen, dass bei solchen Arbeiten nicht lediglich auf vollkommen künstlerische Abrundung gesehen werden darf — der höchste Zweck muss immer die Erzielung eines möglichst raschen und tiefgehenden Verständnisses beim Leser bleiben. Und da nun einmal die Mathematik in ihren Formeln eine unübertrefflich klare Zeichensprache besitzt, weshalb sich ihrer ohne Noth aus allzuweit getriebenen ästhetischen Rücksichten entschlagen? So ward denn hier von den Hülfsmitteln der Buchstabenrechnung umfassender Gebrauch gemacht. Auch darin haben wir vielleicht gegen die moderne Observanz verstossen, dass wir so oft möglich die geschichtlichen Personen selbst redend eingeführt haben, während man gegenwärtig die Paraphrase vorzuziehen scheint. Allein hier liegt der Ton auf den Thatsachen; eine Quellen-Untersuchung sollte geliefert werden, und gewiss dringt man in den wahren Geist des historisch Gewordenen solchergestalt am Besten ein.

Von den in der Annonce der Verlagshandlung in Aussicht gestellten Bestandtheilen des Buches musste der eine unterdrückt werden. Das vorletzte Kapitel sollte eine zusammenhängende Darstellung der arabischen Optik bilden, allein bei genauer Durchsicht des vorhandenen Materiales zeigte es sich, dass eine Durchführung des Planes den ohnehin weit über das projektirte Mass fortgeschrittenen Umfang des Werkes allzusehr erweitert haben würde. Wir behalten uns die Bearbeitung dieses Themas für eine spätere Spezialschrift vor.

Zum Schluss bleibt dem Verf. noch die angenehme Pflicht, den Männern, welche ihn durch gelegentliche Winke bei seinem Unternehmen unterstützten, den Herren Boncompagni, Narducci, Cantor, Curtze, Poggendorff, Steinschneider, Ofterdinger und Bernhard, seinen herzlichen Dank auszusprechen und seinen Versuch ihrer gütigen Einsichtnahme zu

empfehlen. Mehrere werthvolle Mittheilungen verdankt derselbe der freundschaftlichen Theilnahme des leider so früh dahingeschiedenen Friedlein; bei dem philologischen Bruchstück des vierten Abschnittes hat ihm Herr Dr. Schepss zu Ansbach in dankenswerther Weise seinen Beistand gewährt.

Möge das Werkchen zur Belebung mathematisch-historischen Sinnes in unserem Vaterlande seinen bescheidenen Beitrag leisten.

München, im Dezember 1875.

Dr. S. Günther.

Inhalts-Uebersicht.

Kapitel I.

Seite

Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyëdern in der Neuzeit . . . . . 1—92

Kapitel II.

Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung . . . . . 93—135

Kapitel III.

Das Newton'sche Parallelogramm und die Cramer-Puiseux'sche Regel . . . . . 136—187

Kapitel IV.

Historische Studien über die magischen Quadrate . . . . . 188—270

Kapitel V.

Skizzen aus der Logarithmotechnie des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts . . . . . 271—290

Kapitel VI.

Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter . . . 291—307

Kapitel VII.

Quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf Huyghens . . . . . 308—343

Kapitel I.

Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyëdern in der Neuzeit.

§. 1. Obschon wir im Folgenden nur die Errungenschaften im Auge haben, welche die Theorie der sternförmigen Gebilde in Ebene und Raum im Zeitraum der letzten dreihundert Jahre gemacht hat, so müssen wir doch, um einen passenden Anschluss zu erhalten, mit einigen Worten die frühere Geschichte derselben berühren, indem wir uns dabei auf eine bereits vor längerer Zeit publizirte Abhandlung beziehen[1]).

Das erste Auftreten der Sternfiguren lässt sich zurückführen auf Pythagoras und seine Schule, welche das sogenannte regelmässige Sternfünfeck (*πένταλφα*) als Erkennungszeichen anwandte. Von einer eigentlichen Theorie der Sternpolygone konnte in jener Zeit noch nicht die Rede sein; ja es muss sogar sehr zweifelhaft erscheinen, ob Pythagoras überhaupt die nöthigen Kenntnisse zur geometrisch richtigen Verzeichnung einer solchen Figur besessen habe[2]). Diese Ansicht theilt auch Hankel[3]), wenn er sagt: „Wie weit die Pythagoriker in diese Theorie eingedrungen sind, namentlich ob sie die geometrische Konstruktion des Fünfecks und des Pentagondodekaëders gekannt haben, lässt sich nicht mit Sicherheit er-

1) *Günther-Sparagna, Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell' antichità e nel medio evo, Bullet. di bibliogr. e di storia delle scienze matem. e fis.* Tomo VI. S. 313 ff. 2) *Ibid.* S. 321. 3) *Hankel,* Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 95.

mitteln"*). Nachdem dann aus naheliegenden Gründen die griechische Mathematik die Existenz dieser Gebilde einfach ignorirt hatte, erscheinen dieselben zum erstenmale wieder in der so viel bestrittenen Geometrie des Boethius[6]). Im Mittelalter bemächtigt sich die Magie und Mystik der Sternfiguren[7]) jedoch finden wir auch einzelne reelle Fortschritte, wie das von Cantor[8]) in einem Manuskript der Berner Bibliothek aufgefundene Sternachteck.

Würde sich eine von uns[9]) geäusserte Meinung bewahrheiten, so müsste allerdings dem Mittelalter eine höchst wesentliche Bereicherung nicht nur der Lehre von den Sternfiguren, sondern der Geometrie überhaupt, zugeschrieben werden. Der englische Mönch Atelhart übersetzte im 12. Jahrhundert die Elemente des Euclid aus dem Arabischen, und von dieser Uebersetzung besitzt die Stadtbibliothek zu Nürnberg eine Abschrift, welche der um das Studium der Griechen so hoch verdiente Regiomontanus selbst besorgt hat. In diesem Manuskripte, dessen nähere Beschreibung und Charakterisirung wir in jener Untersuchung[10]) mitgetheilt haben, finden sich Betrachtungen über die Sternpolygone, welche sich nicht mit einfacher Aufzählung der am meisten in die Augen fallenden Formen begnügen, sondern bereits den Keim zu einer wirklichen Theorie in sich bergen. Wir glaubten diese Einschaltung für Atelhart selbst in Anspruch nehmen zu müssen, und auch Cantor[11]) war geneigt, dem beizustimmen. Wir dürfen aber auf der

*) Es erscheint nicht ohne Interesse, dass Hankel[4]) auch die in der angeführten Arbeit[5]) ausgesprochene Vermuthung, wie wohl Pythagoras zur Erfindung seines berühmten Lehrsatzes gekommen sei, in ganz derselben Weise formulirt, so dass bei der völligen Unabhängigkeit beider Arbeiten eine höhere Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Hypothese resultirt. Dieselbe besteht darin, dass Pythagoras zuerst an dem allen Kulturvölkern gleichmässig bekannten Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 die Wahrheit in einem speziellen Falle erkannte, durch das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck prüfte und sich so induktorisch zur Erkenntniss des Richtigen erhob.

4) *Ibid.* S. 98. 5) *Günther*, S. 319. 6) *Ibid.* S. 324 ff. 7) *Ibid.* S. 329 ff. 8) *Cantor*, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker, Halle 1863. S. 195. 9) *Günther*, S. 332. 10) *Ibid.* S. 333 ff. 11) *Cantor*, Recension zu: Alexander Ziegler, Regiomontanus, ein geistiger Vorläufer des Copernicus, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrg. Literaturzeit. S. 47.

anderen Seite nicht verschweigen, dass Curtze*), einer der genauesten Kenner mittelalterlicher Mathematik, diese Ansicht nicht theilt, sondern, nach gründlichem Studium der betreffenden Handschrift, in Regiomontan selbst den unbekannten Commentator erkennen will. Von sonstigen Autoren jener Periode, welche sich ausdrücklich mit den Sternpolygonen beschäftigen, sind Campanus[12]) und Bradwardin[13]) zu nennen.

Auf einen früher nur oberflächlich berührten Punkt möchten wir hier noch etwas ausführlicher zurückkommen. Der Umstand, dass abendländische Schriftsteller, deren eigene mathematische Initiative ihren sonstigen Leistungen nach als verschwindend klein betrachtet werden muss, trotzdem sich mit Gebilden vertraut zeigen, von welchen die griechischen Vorbilder gar nichts wissen, hatte es uns wahrscheinlich erscheinen lassen, dass hier spanisch-maurische Einflüsse mit im Spiele sein müssten[14]). Auch Cantor[15]) wirft ähnliche Fragen auf, um durch deren Beantwortung Klarheit über das Verhältniss zwischen Campanus und Atelhart zu erhalten. „Hat Campanus" — fragt er — „ein Exemplar jener Uebersetzung ohne Commentar benutzt, hat er nur allgemeine Kenntnisse von Atelhart'schen, vielleicht auch von arabischen Forschungen über Sternvielecke und über die Stelle, an welche man sie einzufügen pflegte, besessen und hat davon ebendaselbst Notiz genommen? Oder endlich, hat Campanus selbst aus dem Arabischen übersetzt und dort bereits jene erläuternden Zusätze gefunden, von denen er aufnahm, was er verstand und was weniger war, als Atelhart verstanden hatte?" Es musste nur bedenklich erscheinen, dass die jetzt immerhin bereits in grosser Ausdehnung uns bekannt gewordene mathematische Literatur der Araber keine bestimmten Anhaltspunkte an die Hand geben zu wollen schien. Aus den neuesten Studien Curtze's*) geht jedoch mit Evidenz hervor, dass wenigstens ein bestimmtes Sternvieleck den Arabern bereits bekannt war, und hiemit dürften die verschiedenen aufgeworfenen Fragen wohl zum grössten Theile ihre Erledigung gefunden haben.

Wir glauben zur Entscheidung dieser Streitfragen eben-

*) Briefliche Bemerkung von Herrn M. Curtze.

12) *Günther*, S. 338. 13) *Ibid.* S. 339. 14) *Ibid.* S. 333. 15) *Cantor*, a. a. O. S. 47 ff.

falls einen wenn auch nur kleinen Beitrag liefern zu können, indem wir uns auf eine Stelle in einem allerdings den letzten Ausläufern der arabischen Kulturperiode angehörigen Schriftsteller, in Behaëddin, beziehen. Derselbe giebt eine kurze Uebersicht über die am gewöhnlichsten in der Praxis vorkommenden ebenen Figuren und fährt dann fort[16]): „Manchmal bekommen auch einige besondere Namen, als Treppenfigur, Trommelfigur, Spitzenfigur". Nähere Auskunft über diese Bezeichnungen wird im Texte nicht gegeben, wohl aber enthält eine solche der Kommentar; die daselbst geschilderte Figur ist Fig. 1. wiedergegeben, nur sind im Original die hier punktirten Strecken leer gelassen. Ziehen wir dieselben aus, so erhellt folgendes:

Die Araber kannten das reguläre Sternzehneck unter dem Namen der Spitzenfigur.

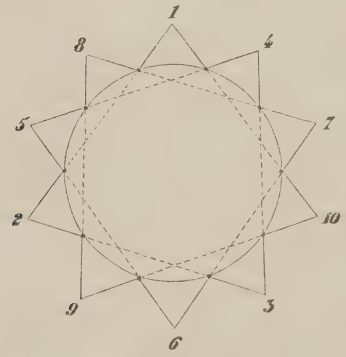


Fig. 1.

Werfen wir nun noch zum Schlusse dieser Einleitung einen Blick auf den materiellen Inhalt des uns hier beschäftigenden geometrischen Spezialkapitels, wie er sich bis zum Ende des 15. Jahrhunderts herausgebildet hatte. Indem wir das rein Gestaltliche vorausnehmen, müssen wir sagen:

Man kannte um 1500 von Sternfiguren das sternförmige Fünfeck, die beiden Siebenecke, das Achteck und Neuneck, während zugleich unrichtigerweise auch ein Sternsechseck aufgezählt wurde, dem jedoch, aus zwei getrennten gleichseitigen Dreiecken bestehend, gerade die charakteristische Eigenschaft der Sternpolygone, sich in Einem Zuge beschreiben zu lassen, abgieng.

Vom theoretischen Standpunkte aus würde das Resumé so lauten müssen:

Man hatte angefangen, allgemeine Untersuchungen über die Winkelsumme der Sternpolygone anzustellen und besass eine induc-

16) *Nesselmann*, Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhossain aus Amul, arabisch und deutsch herausgegeben, Berlin 1843. S. 75.

tive Kenntniss der wichtigen Thatsache, dass in jedem Sternpolygon der höchsten Art diese Summe den constanten Werth 180⁰ behauptet, ungerade Eckenzahl vorausgesetzt.

§. 2. Der erste Mathematiker der beginnenden Neuzeit, welcher der Sternpolygone Erwähnung thut, ist Lucas de Burgo Sancti Sepulchri[17]). Er begnügt sich jedoch mit der Reproduktion einiger Angaben des Campanus. Von ungleich grösserer Bedeutung ist für uns der Name des französischen Mathematikers Charles de Bouvelles (Carolus Bovillus) 1470—1553. Dieser Gelehrte wird gewöhnlich als einer derjenigen genannt, welche einen neuen fruchtbringenden Gedanken in die Lehre von der Kreisquadratur hineinwarfen. Bekanntlich hatte man, wenn auch mit Unrecht, bereits beim Kardinal Nicolaus v. Cusa die erste Idee der Cykloide zu finden geglaubt[18]), und auch dem Bouvelles[19]) werden ähnliche Bestrebungen zugeschrieben. Obgleich auch dies nicht zutrifft — Bouvelles denkt sich allerdings einen Kreis auf einer Geraden fortgewälzt, ohne jedoch sein Augenmerk auf einen bestimmten Punkt der Peripherie zu richten —, so ist doch so viel sicher, dass dieser Mathematiker ein Mann von Scharfsinn war und in seinen zahlreichen Werken genügende Proben hiervon gab, wie wir dies auch in dem für uns wichtigen Falle erkennen werden.

Die geometrischen Schriften des Bouvelles sind in verschiedenen Ausgaben vorhanden, welche in den auf die Sternvielecke bezüglichen Stellen kleine Abweichungen aufzuweisen haben. Wir betrachten zunächst die französische Ausgabe vom Jahre 1542[20]) und geben den bezüglichen Abschnitt hier wörtlich wieder[21]).

„Si on produit les lignes dung pentagone dägle en angle, on fera au mylieu ung petit pentagone contreposé au plus grand.

---

17) *Euclidis opera a Campano interprete fidissime translata. Lucas Paciolus, theologus insignis, altissima mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus judicio castigatissimo detersit,* Venetiis 1509. 18) *Kästner,* Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796. S. 406. *Chasles,* Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, deutsch v. Sohnke, Halle 1839. S. 623. 19) *Wallis, Letter concerning the Cycloid known to Card. Cusanus about the year 1450 and to Carolus Bovillus about the year 1500,* Philos. Transact. 1671. 20) *Livre singulier et utile, touchant l'art et practique de Geometrie, nouvellement en Francoys, par maitre Charles de Bouvelles, Chanoyne de Noyon,* Paris 1542. 21) *Ibid.* Blatt 22.

Si on produit oultre tous les costez dung vray pentagone: ilz viendront à concurrence, et feront le pentagone saillant ou egredient.

Comme il appt p ce pẽtagone ABCDE, duquel tous les costez p duiltz oultre font le pentagone saillant ou egredient FGHIK, ayant cinq angles sur les cinq costez, et hors du pentagone interieur ABCDE (Fig. 2.).

Fig. 2.

Tous les cinq angles de chascun pentagone saillant ou egredient, valent autãt que deux angles droictz, et non plus.

Cecy se peult facilemẽt veoir a loeil, et prouver en la p̃cedẽte figure, car tous les cinq angles du pentagone uniforme ABCDE, valent autant que six angles droictz, et chascun des dictz angles par linterieur pentagone saillant ou egredient est divisé en trois esgallement. Parquoy les quinze petits angles valent precisement six angles droictz, et le pentagone saillant ou egredient, de ces quinze non comprẽt que cinq. Par quoy les dictz cinq angles saillans ou egrediens, ne valent que deux angles droictz: Car deux font les tiers de six comme cinq font le tiers de quinze" (Fig. 3.).

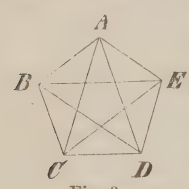


Fig. 3.

Der Gedankengang ist also dieser: Der Innenwinkel eines gewöhnlichen regelmässigen Fünfecks sei α, der des sternförmigen β, so ist

$$3\beta = \alpha,$$
$$5\alpha = 3\pi,$$

also

$$\beta = \frac{\pi}{5}.$$

Nunmehr wendet sich Bouvelles zu jenem uneigentlichen Sternpolygon, dessen wir oben bereits gedachten, zum Sternsechseck. Der betreffende Abschnitt beginnt[22]) mit den Worten:

„De lhexagone egredient.

Si on prolonge droictement les costez de tout hexagone regulier, on fera lhexagone egredient."

Ohne uns auf die Erläuterungen einzulassen, begnügen wir uns, die über diese Figuren handelnden Theoreme hier wiederzugeben.

22) *Ibid.* Bl. 25.

„Les six angles de lhexagone egredient, valent autant que quatre angles droictz.

Tout hexagone egredient est faict et composé de deux isopleures esgaulx, et contreposez dont lung divise les costez de laultre en trois.

Tout hexagone egredient, est double son hexagone regulier.“

Von ungleich grösserer Bedeutung ist die nun folgende Theorie der regelmässigen Sternsiebenecke[23]).

„De lheptagone regulier, par le prolongement des costez, survient lheptagone saillant ou egredient.

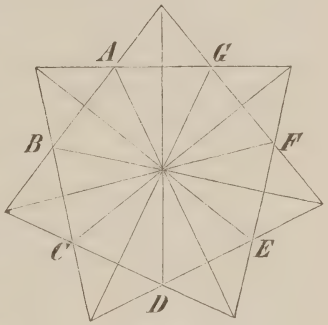


Fig. 4.

Comme il appert au present hexagone), lequel sur le regulier et interieur ABCDEFG, adiouste sept angles saillans hors et esgaulx lũg a laultre: des quelz si on produit les lignes droites passans par le centre de lheptagone, elles iront cheoir sur les angles opposites du dict heptagone interieur et regulier, et chascune partira tout le dict heptagone en deux parties esgalles, comme il appert par la presente figure“* (Fig. 4.).

„Si on prolonge les costez de lheptagone saillant ou il surviendra ung aultre heptagone moult plus egredient que le premier.

Comme on veoit en la presente figure, en laquelle au tour du premier heptagone y ha double heptagone saillant ou egrediẽt, lung est ABCDEFG, laultre HIKLMNO, qui est moult plus egredient, et hors sailant que le premier, ayant aussi les sept angles plus aguz, et toutes les saillez sont esgalles et cõprinses dedens ung cercle, qui le vouldroit a lentour figurer“ (Fig. 5.).

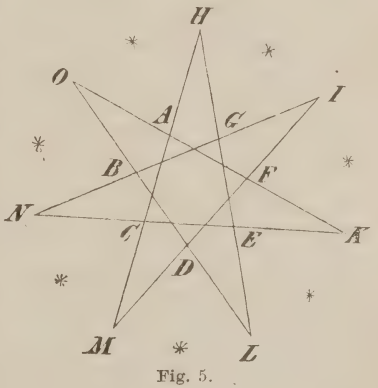


Fig. 5.

*) Offenbarer Druckfehler anstatt *„heptagone“*.

23) *Ibid.* Bl. 27.

„Tous les sept angles exterieurs du dernier et plus long heptagone saillant, ne valent que deux angles droictz. Comme les cinq angles de tous pentagones egrediens, ne valent que deux angles droictz: aussi tous les sept angles exterieurs du dernier et plus saillant heptagone ne valent que deux angles droictz. Sept valẽt dõc autant que cinq. Car nous avons dit dessus, que pour faire un vray pentagone, il fault diviser langle droit en cinq, pour trouver langle du pentagone. Aussi pour obtenir et faire langle de lheptagone, il fault diviser langle droict en sept. Par quoy aux pentagones et heptagones saillans, se fault reigler par cinq et par sept angles saillans, qui tous ensemble ne vaudront que deux angles droictz.“

Bouvelles ahnt hier ebenfalls, wie man sieht, die Wahrheit und Allgemeingültigkeit einer Thatsache, die in seiner Terminologie so auszusprechen sein würde:

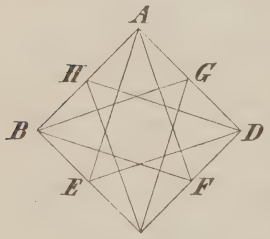


Fig. 6.

Bei all den regelmässigen Sternvielecken von ungerader Seitenzahl, deren Innenwinkel am meisten von denen des primären (uniformen) Vielecks der Grösse nach abweichen (egredient), beträgt die Summe der ersteren stets zwei Rechte.

Dass Bouvelles stets nur regelmässige Sternvielecke in's Auge fasst, kann nicht befremden, da diese Beschränkung sich auch noch in weit späterer Zeit findet und erst von dem deutschen Mathematiker Meister definitiv aufgehoben wurde.

Die lateinische Ausgabe der Geometrie des Bouvelles[24]) fügt zu dem Vorstehenden einiges Neue hinzu. Bemerkenswerth erscheint schon der Umstand, dass bereits bei einer früheren Angelegenheit der Autor ganz zufällig auf ein nicht regelmässiges Sternpolygon kommt. Er halbirt nämlich die Seiten eines Quadrates *A B C D* (Fig. 6.) in den Punkten *E*, *F*, *G*, *H* und verbindet jeden Halbirungspunkt mit den beiden Gegenpunkten, so dass er ein verschobenes Sternachteck *A E D H C G B F* erhält. Indess werden aus dieser Konstruktion keine weiteren Folgerungen gezogen[25]).

---

24) *Caroli Bovilli Samarobrini Geometricum opus duobus libris comprehensum,* Lutetiae 1557. 25) *Ibid.* Bl. 33.

Die eigentliche Theorie der Sternvielecke ist folgende[26]):

„De Pentagono egrediente. Cujusvis regularis Pentagoni latera, quantumlibet forinsecus producta, egredientem Pentagonum circa illum conficiunt.

Angulus interior uniformis Pentagoni, ad angulum Pentagoni egredientis, est triplus.

Omnes quinque anguli egredientis Pentagoni, sunt tantum duobus rectis angulis aequales.

Axis, sive cathetus egredientis Pentagoni est duplus ad axem Pentagoni uniformis“ (Fig. 7.).

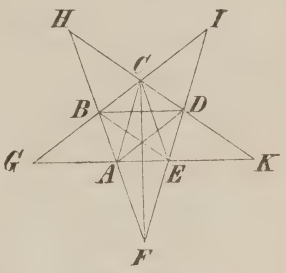


Fig. 7.

„Si super basim uniformis Pentagoni, duae rectae ad illius verticem extendantur, hae triangulum intra Pentagonum conficient: cujus singuli ad basim anguli, ad angulũ verticis erunt dupli.“

Die nun sich anschliessende Beschreibung von Sieben- und Sechseck bietet uns nichts Neues, wohl aber ist dies der Fall mit dem Achteck, welches in dem französisch geschriebenen Werke sich nicht findet. Die hauptsächlichsten sich auf dasselbe beziehenden Sätze sind diese[27]):

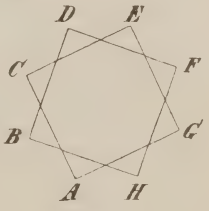


Fig. 8.

„In omni Octogono, productis forinsecus duobus, et duobus ejus lateribus uno distantibus, fit circa eum egredientium angulorum Octogonus, quẽ primò egredientẽ vocamus“ (Fig. 8.).

„Omnes citeriores anguli primò egredientis Octogoni sunt recti.

Protensis omnibus primò egredientis Octogoni lateribus, fiet circa eundem alius egredientium angulorum Octogonus, longè priore amplior, et acutiorum angulorum“ (Fig. 9.).

Fig. 9.

Der Mangel formeller Anschauung, welchen wir bereits bei Gelegenheit des sogenannten Sternsechseckes zu rügen hatten, tritt hier aufs neue zu Tage, denn von sternförmigen Achtecken kann es nur eine einzige Art geben, die hier angeführte zweite. Die Ursache solcher fehlerhaften Klassifikation liegt offenbar

---

26) *Ibid.* Bl. 45. 27) *Ibid.* Bl. 58.

darin, dass man die verschiedenen Polygone nicht unmittelbar aus dem Kreise, sondern jedes Vieleck einer nächst höheren Ordnung aus dem der unmittelbar vorhergehenden abzuleiten suchte.

Auch in die „*Margarita philosophica*“ des Gregorius Reisch sind, wie Chasles[28]) angiebt, einige Definitionen des Bouvelles übergegangen. Dieselben sind ihrer Kürze halber bemerkenswerth, sie sind ungleich prägnanter, als die oben angeführten. So heisst es ganz bezeichnend[29]): „*Pentagonus uniformis dicitur, cujus latera non se mutuo intercidunt. Egrediens vero, cum ejus latera se invicem secant*“.

§. 3. Ein recht anschauliches Bild der Schwierigkeiten, welche den Geometern jener Epoche die direkte Anschauung der sternförmigen Vielecke darbot, gewährt uns ein Lehrbuch der Perspektive, von dem auch Chasles[30]) spricht. „Man findet“ — sagt derselbe — „in der Perspektive des Daniel Barbaro das sternförmige Fünfeck, Sechseck nnd die beiden Siebenecke. Aber es scheint nicht, dass der Verfasser die Absicht gehabt hat, diese neuen Polygone zu erzeugen, sondern er hat nur darthun wollen, dass die gewöhnlichen regelmässigen Polygone auf zwei Arten zu anderen Polygonen führen, die ihnen gleichartig sind.“ Diese Arten sollen einmal durch Verlängern der Seiten, das anderemal durch Diagonalenziehen entstehen. In der That scheint Barbaro von einem selbstständigen Interesse, welches solche Gebilde an sich haben könnten, keine Ahnung besessen zu haben, wie aus seiner überaus kurzen Beschreibung hervorgeht. Dieselbe lautet[31]):

Fig. 10.

Fig. 11.

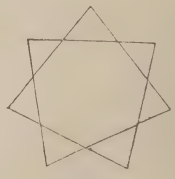


Fig. 12.

„*25, 26, 27, 28, 29, 30*“ — in unserem Falle Fig. 10, 11, 12, 13, 14, 15 — „*le quali ed di dentro, ed di fuori possono*

28) *Chasles*. S. 551. 29) *Reisch*, *Margarita philosophica*, Heidelb. 1535. S. 1231 ff. 30) *Chasles*, S. 552. 31) *La pratica della perspectiva di monsignor Daniele Barbaro*, In Venetia. S. 27.

essere simiglianti, tirerai le linee dagli anguli agli anguli, ed dai lati a i lati ed da i lati agli anguli".

Fig. 13.

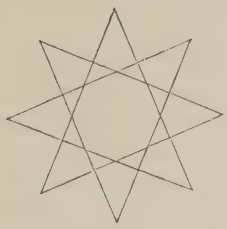


Fig. 14.

Fig. 15.

Die Unbehülflichkeit des Ausdrucks fällt hier umsomehr auf, als, wie wir sahen, Bouvelles sich bereits einer ziemlich ausgebildeten Terminologie bediente.

§. 4. Chasles[32]) macht ausser den genannten Autoren noch eine Reihe anderer namhaft, bei welchen die Sternvielecke eine gelegentliche Erwähnung finden. Bei einem derselben waren wir nicht in der Lage es zu constatiren. Es ist dies Jacob Peletarius, ein nicht unverdienter Mathematiker, dessen Name besonders in der Geschichte des Streites über den Berührungswinkel[33]) genannt zu werden pflegt. In denjenigen Schriften von ihm, welche wir vergleichen konnten, haben wir nichts hieher gehöriges zu finden vermocht[34]).

Auch Clavius weist in einem Zusatze zur 32. Proposition der „στοιχεῖα" mit einigen Worten auf das Sternfünfeck als auf eine Figur hin, deren Innenwinkel wie beim Dreieck zusammen 180^0 betragen, jedoch erklärt er ausdrücklich, dass er diesen Excurs dem Campanus entnehme. Sein Lehrsatz ist dieser[35]): *„Si pentagoni singula latera producantur in partem utramque, ita ut quaelibet duo extra coeant; efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus aequales duobus rectis".* Der Beweis lässt sich unmittelbar durch Anwendung jenes 32. Satzes (ein Aussenwinkel im Dreieck ist gleich der Summe der von ihm getrennt liegenden Innenwinkel) führen, und deshalb fand wohl auch diese Einschaltung gerade hier ihre Stelle.

---

32) *Chasles*, S. 549. 33) *Van Swinden*, Elemente der Geometrie, deutsch v. C. G. J. Jacobi, Jena 1834. S. 394. 34) *Jacobi Peletarii de usu Geometriae liber unus*, Parisiis 1572. *Jacobi Peletarii Coenomani in Euclidis Elementa Geometriae demonstrationum libri sex*, Lugduni 1557. 35) *Euclidis Elementorum libri VI, ed. Clavius*, Romae 1574. Bl. 55.

Wir finden bei Clavius, wie erwähnt, des Pentagramms bereits als eines Analogons des Dreiecks gedacht; das Verdienst, dieser uns jetzt so natürlich scheinenden Auffassung die Bahn gebrochen zu haben, gebührt jedoch in erster Linie dem Petrus Ramus. Weniger als schöpferischer Geist, denn als scharfer kritischer Kopf bekannt, dem es vor Allem auf Prüfung der Erkenntnissquellen ankam, hatte dieser originelle Gelehrte den Kampf gegen die Alleinherrschaft des Aristoteles aufgenommen und bis zu einem gewissen Grade siegreich durchgeführt, so sehr auch diese Bestrebung ihn in sonstigen Plänen behinderte[36]) und ihm selbst von geistesverwandter Seite, wie von Frischlin[37]), heftigen Widerspruch zuzog. Gerade aus dieser polemischen Thätigkeit des Ramus zog die Lehre von den Sternvielecken wesentlichen Nutzen, indem sie die Ursache eines lebhaften literarischen Widerspruches ward, von dem wir später ausführlich handeln werden, und der, wie gleich erwähnt sein möge, für die Geometrie selbst höchst befruchtend wirkte. Die Entstehungsgeschichte dieses Streites müssen wir nunmehr schildern.

Ramus war stets bemüht, bei Aristoteles Fehler aufzufinden, und es ist sehr erklärlich, dass ihn diese Sucht, Irrthümer bei andern aufzudecken, zu eigenen Irrthümern veranlassen musste. So glaubte er bemerkt zu haben, der Beweis, welchen Euklides für den Satz von der Winkelsumme des Dreieckes führt, sei nach den Gesetzen der aristotelischen Logik kein stichhaltiger. Er reproducirt jenen Beweis und fährt dann[38]) weiter fort: „*Haec demonstrationis hujus ratiocinatio est: Aristotelicis tamen legibus, quae docebuntur, demonstratio nulla. Nec enim propria affectio est, nec ex primis et immediatis, nec quaestionem propter quid concludit*". Wichtiger als diese jedenfalls nicht gerechtfertigte Bemerkung, auf welche wir noch zurückkommen müssen, ist für uns folgender an der gleichen Stelle sich findende Satz: „*Affectio autẽ postea quinto capite dicetur propria trianguli: Id tamen à Proclo refellitur, et*

36) *Cantor*, Ramus in Heidelberg, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 3. Jahrg. S. 133 ff. 37) *Strauss*, Leben und Schriften des Dichters und Philologen Nicodemus Frischlin, Frankfurt a. M. 1856. S. 427. 38) *P. Rami Scholarum dialecticarum, seu animadversionum in Organum Aristotelis, libri XX*, Francofurti 1594. S. 313.

refelletur à nobis". Lernen wir jetzt diese Widerlegung kennen; dieselbe steht an einem anderen Orte[39]) und lautet:

„*At interiores angulos duobus rectis aequari non est proprium trianguli. Neque ab Aristotele per caussam propriam concluditur. Etenim ut prius illud priore loco disseratur, figura non trilatera sic institui potest, cujus interiores anguli duobus rectis aequentur, ut hic detractis rectis cernitur, quod antea patuit* (Fig. 16.). *Proclus hic videtur propriam affectionem tueri, quia talis figura non sit rectilinea. Sed tamen rectilinea etiam potest aequare interiores duobus rectis. Sic quinquangulum è continuatis ordinati quinquanguli lateribus factum aequat quinque interiores angulos duobus rectis, ut hic* (Fig. 17.). *Nam dum consideras triangulum e y o exterior angulus a y s aequatur interioribus ad o et e, item dum consideras triangulum i u s exterior a s y aequatur interioribus ad i et u, et de quinque interioribus y a s aequatur sibi ipsi. Quare cũ quinque interiores aequentur tribus aequantibus duos rectos, ipsi quoque aequabuntur duobus rectis*". Die weitere Argumentation bezieht sich auf das sphärische Dreieck und berührt uns hier nicht näher.

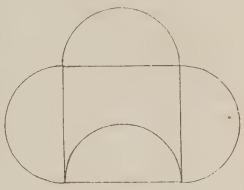


Fig. 16.

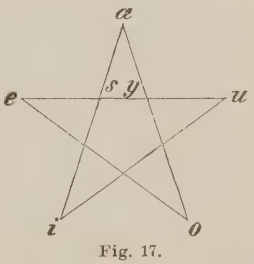


Fig. 17.

Was Ramus hier von den Sternpolygonen sagt, ist materiell nichts neues, formell aber von hoher Wichtigkeit.

Nirgends vor Ramus wird mit gleicher Bestimmtheit die Stellung der Sternvielecke zu den anderen Figuren hervorgehoben, indem es bei den früheren Darstellungen meist ungewiss bleibt, ob das Sternpolygon wirklich als solches oder nur als gewöhnliches Vieleck mit einspringenden Winkeln betrachtet wird.

Wie weit hier Ramus nicht nur seiner, sondern auch der folgenden Zeit vorangeeilt war, dafür möge folgende Aeusserung eines bekannten deutschen Gelehrten als Beleg dienen. Kästner bemerkt nämlich zu der hier wiedergegebenen Stelle[40]): „Ramus hat nehmlich nicht daran gedacht, dass die zehn Verlängerungen eine Figur von zehn Seiten ein-

39) *P. Rami Scholarum mathematicarum libri unus et triginta*, Basileae 1569. S. 186. 40) *Kästner*, 3. Band, Göttingen 1799. S. 201.

schliessen, die ausser genannten fünf auswärts gehenden Winkeln, noch fünf einwärts gehende hat, Scheitelwinkel der Winkel des Fünfecks . . . dass aber Ramus bey dem Sterne den die verlängerten Seiten des Fünfecks machen einer Figur die sichtlich zehn Seiten hat, nur die fünf auswärts gehenden Winkel wahrnimmt, zeigt freilich wenig Scharfsichtigkeit". Dies ward geschrieben zu einer Zeit, wo Kästner's Kollege, Meister (s. §. 15.) den Begriff des sternförmigen Vielecks bereits allgemein festgestellt hatte.

§. 5. In der schon mehrfach zitirten Geschichte der Sternpolygone im Alterthum und Mittelalter haben wir denjenigen literarischen Erscheinungen einen eigenen Abschnitt[41]) einräumen zu sollen geglaubt, welche von den Sternpolygonen handeln, ohne doch die wissenschaftlich-geometrische Seite der Sache im Auge zu haben, und ein Gleiches wollen wir der Vollständigkeit halber auch hier thun. Nach Kepler's unbestimmter Aussage soll sich Theophrastus Paracelsus*) auf das Sternfünfeck als Symbol der Gesundheit berufen haben[43]), wie dies bereits die pythagorische Schule that[44]); einer von Kästner[45]) mitgetheilten Angabe zufolge hatte diese Symbolik auch noch in neuerer Zeit ihre Anhänger.

Hieher gehört ferner die Anführung des Sternfünfeckes bei Alstedius[46]). Seine Beschreibung ist folgende (Fig. 18.):

Fig. 18.

„Pentagonum ita scribitur et a superstitiosis notatur hoc nomine Jesus. Si pentagono ita constructo addas lineam ex superiori angulo in oppositum angulum ductam, fiet illa figura, quam vocant sanitatem Pythagorae; quia Pythagoras, hac figura delectatus, adscribebat singulis prominentibus angulis has quinque litteras ν, γ, ι, ε, α: Germani vocant ein Trudenfuss: quia sacerdotes veteres

*) Wir haben die von Kepler angezogene Stelle in der voluminösen Gesammtausgabe der Werke des Theophrastus nicht zu finden vermocht; auch thun seine sonst alles Merkwürdige sorglich registrirenden Biographen Rixner und Siber[42]) derselben keine Erwähnung.

41) *Günther*, S. 329 ff 42) *Rixner* u. *Siber*, Leben und Lehrmeinungen berühmter Physiker am Ende des XVI. und am Anfange des XVII. Jahrhunderts, 1. Heft, Sulzbach 1819. 43) *Chasles*, S. 548. 44) *Günther*, S. 314. 45) *Kästner*, Geometrische Abhandlungen, 1. Abth. Göttingen 1789. S. 334. 46) *Alstedius*, *Encyclopaedia universa*, Herbornae 1620.

Germanorum et Gallorum vocabantur Druidae: qui dicuntur calacos" — *calceos* — „*hujus figurae gertasse*". Hier stossen wir wieder auf jene eigenthümliche Verquickung der celtischen Druiden mit dem deutschen Wort Trude. Jedenfalls besteht eine Verwandtschaft beider, aber das Bindemittel des Pentalpha hat gewiss nicht existirt. Indess hatte diese Idee sich in den Köpfen vieler Gelehrten des 17. und 18. Jahrhunderts festgesetzt; wir führen als Beleg hiefür die Thatsache an, dass in der Nähe der fränkischen Stadt Gunzenhausen sich ein Denkstein findet, welcher das reguläre Sternfünfeck als Haut-Relief und darunter die Worte trägt: Das Grabmal des Druiden.

Einen guten Einblick in den Gebrauch, welchen die mystische Dämonologie früherer Jahrhunderte von den Sternpolygonen zu machen liebte, bieten uns die Werke des bekannten Polyhistors Athanasius Kircher, vor Allem seine „Arithmologie". Nachdem in der Lehre von den „magischen Amuleten" von den verschiedenen Zeichen die Rede war, welche hier vorzukommen pflegen, heisst es weiter[47]): „*In quibus nil frequentius occurrit, quam Pentalpha et Hexalpha; est autem Pentalpha nil aliud, quam linearis figura in quinque A diductum, quibus Graeci ὑγιεία, id est salutem et sanitatem exprimebant, quo Antiochum vexillo imposito, jussu Alexandri in somno apparentis, mox admirabilem à Galatis reportasse victoriam Magi fingunt, eoque tanquam summae felicitatis symbolo in suis nugamentis utuntur*" (Fig. 19, 20.). Es werden dann eine Menge

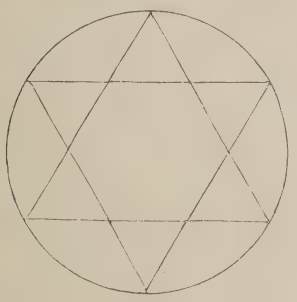


Fig. 19.

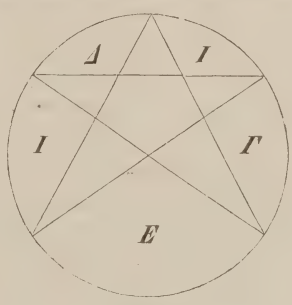


Fig. 20.

Bedeutungen dieser Figuren aufgezählt und zuletzt noch eine Combination der Sternvielecke mit einer Art magischer Qua-

47) *Kircher, Arithmol ogiasive de abditis Numerorum mysteriis*, Romae 1665. S. 537.

drate angegeben[48]) (Fig. 21.), welche in der „satanischen Kunst“ eine ganz besonders wichtige Rolle spielen soll. Die Form, welche Kircher dem Pentalpha giebt, ist von mathematischem Interesse, wie sich aus Nachstehendem ergiebt:

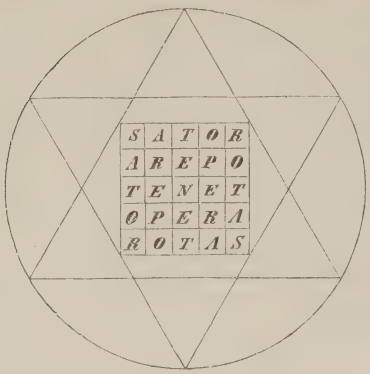


Fig. 21.

Das Sternfünfeck Kircher's ist das erste nicht regelmässige Sternpolygon, welches uns in der Geschichte entgegentritt.

Auch in einem andern Werke Kircher's wird ein Sternvieleck, nämlich das Sternsiebeneck der dritten Ordnung, zu einer symbolischen Darstellung der Planetentage verwendet[49]). In diesem nämlichen Buche wird gezeigt, wie man (uneigentliche) Sternpolygone herstellen kann. Kircher sagt nämlich[50]): „*Si denique lucidum corpus fuerit cujusvis polygonae figurae per quodvis foramen multilaterũ trajectum; id eam figuram exprimit cujus et ipsum lucidũ corpus ἀκτινόβολον, ut in apposita figura apparet, et paullo post melius deducetur*“. Es folgt dann eine sehr ausführliche Beschreibung dieses Experimentes, welche Kircher aus einem Werke Kepler's entnommen haben will, als Beispielfiguren dienen die in Fig. 22. und 23. dargestellten

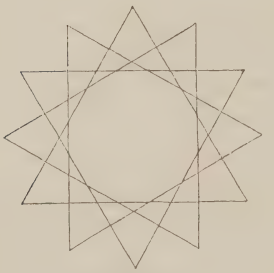


Fig. 22.

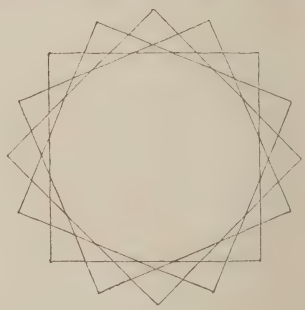


Fig. 23.

in einander verschränkten gleichseitigen Dreiecke und Vierecke. Dass wirkliche, d. h. in Einem Zuge zu beschreibende

48) *Ibid.* S. 220. 49) *Kircher, Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta*, Romae 1646. S. 537. 50) *Ibid.* S. 117.

Sternvielecke in der hier geschilderten Weise nicht entstehen können, ist an sich klar.

Wir benützen diese Gelegenheit, um eine eigenthümliche Verwendung der Sternvielecke zu notiren, welche sich bei einem Schriftsteller jener Zeit findet, nämlich bei Daniel Schwenter. Derselbe stellt[51]) die Aufgabe: „Sieben Stück Geld auf einer geometrischen Figur also zu verschieben und niderzulegen, dass der Schub allezeit nach einer geraden Lini gehe, und an einem Ende allezeit anfahe, da noch kein Geld ligt, und auf derselben Lini Ende allezeit nidergelegt werde". Die Figur Schwenter's (Fig. 24.) ist das reguläre Sternachteck, und man bemerkt sofort, dass die Lösung des Problems darauf hinauskommt, diese Figur in einem Zuge herzustellen. Die nämliche Figur erscheint dann später nochmals in der Aufgabe[52]): „In einen Apfel einen Stern zu schneiden".

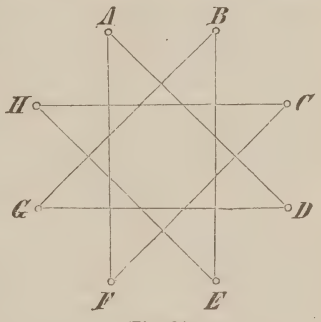


Fig. 24.

§. 6. Kehren wir nunmehr auf das rein szientifische Gebiet zurück. Der Standpunkt der Geometrie in der hier besprochenen Zeit war insofern einer Weiterentwickelung der Lehre von den Sternpolygonen nicht günstig, als die dazu erforderliche Verallgemeinerung des Vielecksbegriffes an sich fehlte. Allerdings fühlten einzelne hervorragende Männer diesen Uebelstand heraus und suchten ihn nach Kräften zu heben, allein eine nachhaltige Wirkung vermochten diese immer noch sehr isolirt auftretenden Bestrebungen vorläufig noch nicht zu erzielen.

Der erste Name, den wir hier zu nennen haben, ist der eines um die Mathematik auch sonst vielfach verdienten Mannes. Albert Girard*), der Mitbegründer der richtigen Lehre von

*) Man hat in neuester Zeit den genialen Mathematiker für Deutschland vindiziren zu können geglaubt, und Matthiessen[53]) z. B. nennt ihn

51) *Schwenter, Deliciae physico-mathematicae*, Nürnberg 1636. S. 149. 52) *Ibid.* S. 569. 53) *Matthiessen*, über eine Beziehung der Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks zu den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung und ihrer Resolvente, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 10. Jahrg. S. 331.

den negativen Zahlen und der alleinige Begründer der analytischen Polygonometrie, brach auch hier die Bahn. Leider sind, wie auf anderen Gebieten, so auch auf diesem, seine Leistungen nur wenig bekannt geworden; selbst Chasles scheint sie nicht zu kennen, und nur Kästner wendet ihnen unter den Geschichtschreibern der Mathematik einige Aufmerksamkeit zu[56]).

Es ist von hohem Interesse, die Klassifikationsmethode Girard's kennen zu lernen, obwohl sie zu weitschweifig und uns nicht immer ganz verständlich ist. Die Lehre von den Vielecken ist in sieben Abschnitten des kurzen geometrischen Abrisses enthalten, welchen er seinen trigonometrischen Tafeln beifügte[57]). Genaue Zitate sind wegen der mangelnden Seitenzahlen nicht wohl thunlich, wegen des überaus geringen Umfanges des Büchleins aber auch nicht nöthig.

Die ersten fünf Paragraphen enthalten allgemeine Betrachtungen über die Anzahl der Stücke, welche zur vollständigen Berechnung einer geradlinigen Figur bekannt sein müssen. Hierauf folgt eine höchst detaillirte Beschreibung der einzelnen Vielecksarten, welche hier reproduzirt werden möge.

„*VI. Aux quadrangles il y a 21 cas, car ilz ont trois sortes des formes, et chacune forme a 7 cas.*

Les formes sont la simple, la croisée, et l'autre ayant l'angle renversé. Et tous se peuvent resoudre en menant une diagonale (qui tombe dehors aux croisez, et aucunefois à ceux qui ont l'angle renversé) hormis deux cas dont l'un a les angles donnez et deux costez incogneux opposites seulement, lesquels il faut prolonger

kurzweg „Gerhard". Hingegen plädirt Vorsterman van Oijen[54]) für die französische Abstammung Girard's und führt für dieselbe eine Reihe beachtenswerther Gründe an[55]). Vielleicht greift man nicht fehl, wenn man in ihm einen Belgier französischer Zunge (Wallonen) sieht, den religiöse Verfolgung dazu brachte, den südlichen Theil der Niederlande mit dem ihm sympathischeren protestantischen Holland zu vertauschen.

54) *Vorsterman van Oijen*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 13. Jahrg. Literaturzeit. S. 24. 55) *Id. Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVIme et du commencement du XVIIme siècle et leurs instruments*, Bullett. di bibliografia e di storia delle scienze mat. e fisiche. Tomo III. S. 370. 56) *Kästner*, 3. Band. S. 108. 57) *A. Girard Samielois, Tables des sinus tangentes et secantes, selon le raid de 10000 parties, avec un traité succinct de la trigonometrie tant des triangles plans que sphériques*, À la Haye 1626.

jusques a ce qu'ilz conviennent (veu qu'ils ne doivent pas estre incogneux parallels par la precedente:) L'autre cas n'a autres angles donnez que ceux qui sont sur la base (qui est incogneux) et alors il faut faire un parallelogramme dont la base est un autre costé suyvant, soyent la moitié d'iceluy, puis une ligne qui conjoigne les sommets des quadrangles."

Wir glauben, dass der Begriff und Name des überschlagenen (gekreuzten) Vierecks hier zum erstenmale mit Bewusstsein gebraucht wird. Die eigentliche Eintheilungsmaxime Girard's ist offenbar die: Die Arten der Vierecke sind drei, je nachdem beide Diagonalen ins Innere oder eine ausser-, eine innerhalb, oder endlich beide ausserhalb des Vierecks selbst fallen.

„*Aux pentagones il y a 110 cas, assavoir 11 formes, chacune ayant 10 cas. Quant aux 11 formes, il y en a 4 d'une superfice, 4 de deux, 1 de trois, une de 4 et une de six.*"

Der Sinn dieser Worte ist der: Der Perimeter eines Fünfecks schneidet sich selbst entweder gar nicht, oder ein-, zwei-, drei- und fünfmal. In diesen Fällen ist der Flächenraum der Figur entweder ein ungetheiltes Ganzes, oder aus zwei, drei, vier und sechs Theilen zusammengesetzt. Die in Girard's Darstellung ausgedrückte Mannigfaltigkeit von Ge-

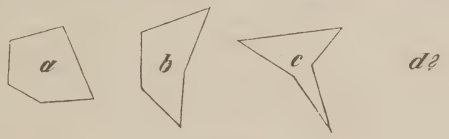


Fig. 25.

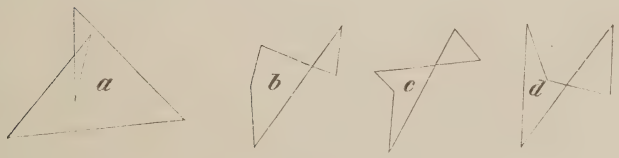


Fig. 26.

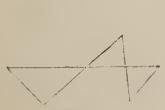


Fig. 27.

Fig. 28.

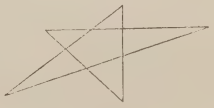


Fig. 29.

stalten wiedergeben zu wollen, hat immer etwas problematisches; indess glauben wir durch Fig. 25. 26. 27. 28. 29. die Idee des

Autors so ziemlich analysirt zu haben. Es entstehen so wirklich 10 wesentlich verschiedene Formen. Man erkennt, dass Girard hier eine Definition und Eintheilung der Fünfecke gegeben hat, welche erst die allerneueste Zeit wieder ans Licht ziehen sollte, man vergleiche z. B. die vollständig übereinstimmende Darstellung von Baltzer[58]). Bei einer solchen Auffassung der Sache war es selbstverständlich ganz gleichgültig, ob die betreffende Figur regelmässig war oder nicht. Die vierte Form der ersten Art bleibt allerdings unerklärt.

„*Or touchant les hexagones, il y a 1035 cas, que j'ay enumeré à la haste, assavoir 69 formes et chacune de 15 cas; quant aux formes, il s'en trouve 7 d'une superfice, 19 de deux, 12 de trois, 17 de quatre, 4 de cinqu, 6 de six, 3 de sept, et 1 de huict, le tout quand il n'y a que 2 lignes qui passant par un poinct, comme jadis estoyent les porismes d'Euclides, qui sont perduz, lesquels j'espere de mettre bientost en lumière les ayant restituez il y a quelques années ença.*“

Auch hier werden wir in Girard's Verständniss ohne Schwierigkeit eindringen, sobald wir nur daran festhalten, dass eine Form durch die Anzahl der Durchschnittspunkte charakterisirt ist, in welchen der Perimeter sich selbst durchsetzt. Wie klar ihm dieser bestimmende Umstand war, geht besonders auch aus der ausdrücklich formulirten Bedingung hervor, dass die Begrenzungslinie keine mehrfachen Punkte aufweisen dürfe — eine Limitation, in welcher sich wieder der seiner Zeit so weit vorauseilende Blick klar ausspricht. Da es natürlich nicht wohl möglich ist, den Formenreichthum Girard's wirklich bildlich darzustellen, so wollen wir uns darauf beschränken,

Fig. 30.

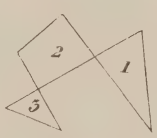


Fig. 31.

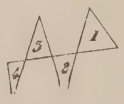


Fig. 32.

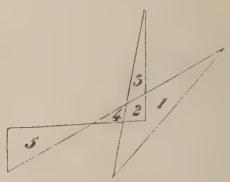


Fig. 33.

von jeder Form eine charakteristische Figur als Prototyp herauszugreifen, wie diess denn in Fig. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36.

58) *Baltzer*, die Elemente der Mathematik, 2. Band, Leipzig 1870. S. 9.

geschehen ist. Diese Figuren entsprechen bezüglich den Formen 2—8 Girard's.

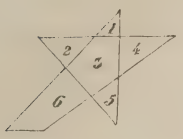


Fig 34.

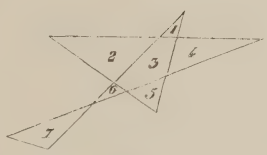


Fig. 35.

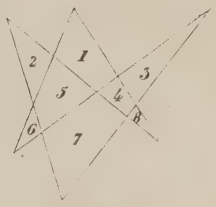


Fig. 36.

Kunze, einer der wenigen neueren Mathematiker, welche sich mit Girard's Leistungen bekannt zeigen, hat zu der hier besprochenen Stelle die Bemerkung gemacht[59]), dass es wohl nicht leicht sein würde, einen klaren Einblick in seine Auffassung der Sache zu gewinnen. Wir glauben jedoch im Vorstehenden den richtigen Schlüssel zum Verständniss gegeben zu haben, obwohl dadurch nicht ausgeschlossen ist, dass noch in einigen untergeordneten Fällen Zweifel bestehen.

§. 7. Dem Namen Girard reiht sich in der Entwickelungsgeschichte der Lehre von den Sternpolygonen ein anderer würdig an, der des Polen Brocki oder, wie er der Zeitrichtung folgend sich umtaufte, Broscius. In mehr als Einer Beziehung gleichen sich beide Männer: Beide fanden Gelegenheit, in ein und derselben Sache weitere und tiefere Blicke zu thun, als ihre Zeitgenossen, und beide fielen vielleicht eben aus dem Grunde unverdienter Vergessenheit anheim, letzterer sogar in so hohem Grade, dass man seinen Namen in dem sonst so vortrefflichen Lexikon Poggendorff's vergeblich sucht. Seine Werke, vor Allem das uns hier interessirende, scheinen nur in wenigen Exemplaren noch vorhanden zu sein, so dass auch unsere nun folgende Darstellung sich nicht auf Autopsie stützt, sondern lediglich auf die glücklicherweise ziemlich vollständigen Notizen, welche Kästner[60]) und Chasles[61]) gegeben haben.

Broscius ist eine um so merkwürdigere Erscheinung, als sein Standpunkt gegenüber den Sternvielecken ein völlig ablehnender war. Er konnte sich durchaus nicht mit der Idee

59) *Kunze*, Lehrbuch der Geometrie, Jena 1851. S. 144. 60) *Kästner*, 3. Band. S. 199 ff. 61) *Chasles*, S. 558 ff.

befreunden, dass diese Gebilde eine selbstständige Existenz als mit den gewöhnlichen Vielecken gleichberechtigt sollten beanspruchen können, und trat denjenigen Mathematikern, welche diese Ansicht verfochten, mit grösster Heftigkeit gegenüber. Da dieselben ihre Sätze allerdings vielfach zu enge gefasst hatten, so suchte er sie durch Ausdehnung derselben auf andere Fälle *ad absurdum* zu führen, gab jedoch gerade durch diese Ausdehnung der Lehre von den Sternpolygonen eine von ihm selbst nicht beabsichtigte fruchtbringende Anregung.

Wie wir oben (4) sahen, hatte Ramus in seiner Polemik gegen die aristotelische Logik den Nachweis geführt, dass auch bei einem regulären Sternfünfeck die Summe der Innenwinkel zwei Rechte betrage. Nun hatte aber das ganze Werk des Broscius[62]) ausgesprochenermassen den Hauptzweck, den Aristoteles gegen die Angriffe der neu-philosophischen Schule in Schutz zu nehmen, und dieser Exkurs des Ramus auf das geometrische Gebiet bot dem polnischen Mathematiker eine willkommene Gelegenheit, seinen Hebel einzusetzen. In zweierlei Weise suchte er seinen Gegner zurückzuweisen: einmal dadurch, dass er den Begriff eines sich selbst durchsetzenden Vieleckes als absurd darzuthun sich bemühte, dann aber auch dadurch, dass er nachwies, wie Ramus' Theorem auch bei einer Anzahl anderer Figuren gelte. Durch diese Bemerkung war er sicher, der Auffassung seines Gegners einen tödlichen Schlag zu versetzen, ward aber nur unbewusst der Schöpfer des Fundamentalsatzes von den Sternvielecken ungerader Eckenzahl. Freilich erkannte er die Thatsache nicht als solche an, wie ihn denn sein streng euklidischer Standpunkt zu dem Ausspruch verleitete: „*Quis unquam geometrarum vidit quinquangulum decem laterum et quinque angulorum?*“ Bei fehlender Quellenkenntniss halten wir es, um einen Einblick in Broscius' Gedankengang zu gewähren, für das Beste, die betreffende Stelle des Werkes von Chasles wörtlich anzuführen:

„Broscius citirt das Werk von Bradwardin und beweist, dass man unendlich viele Figuren mit ausspringenden Winkeln von 7, 9, 11 u. s. w. Seiten bilden könne, in denen,

62) *Johannis Broscii Aristoteles et Euclides defensus, contra Petrum Ramum et alios, additae sunt duae disceptationes de numeris perfectis,* Amstelodami 1690.

so wie in der Figur des Ramus, die Summe der Winkel gleich zwei Rechten ist. Bradwardin hat diesen schönen Satz nur geglaubt, ohne ihn zu beweisen; und Charles de Bouvelles hat ihn nur auf das ausspringende Fünfeck der dritten Gattung angewandt. Broscius geht weiter; er betrachtet die Figuren der verschiedenen Gattungen, bei derselben Anzahl der Seiten, und giebt die Summe ihrer Seiten*) an.

Er findet, dass es drei Gattungen von Siebenecken giebt, wenn man das gewöhnliche Siebeneck mitzählt, in denen die Summe der Winkel 10, 6 und 2 Rechte ist;

Drei Arten von Achtecken, in denen die Summe der Winkel 12, 8 und 4 Rechte ist;

Sechs Arten von Figuren mit*) ausspringenden Winkeln (worunter das gewöhnliche 14seitige Polygon mitbegriffen ist), in denen die Summe der Winkel 24, 20, 16, 12, 8 und 4 Rechte ist;

Sieben Arten von Figuren mit 15 ausspringenden Winkeln, in denen die Summe der Winkel 26, 22, 18, 14, 10, 6 und 2 Rechte ist.

Diese Resultate stimmen mit dem von Poinsot gefundenen Gesetz überein, nach welchem die Summe der Winkel jedes Polygons

$$S = 2(m - 2h)$$

ist, wenn m die Anzahl der Seiten des Polygons und h diejenige Zahl ist, welche die Gattung oder die Ordnung dieser Figur angiebt".

Auffällig erscheint es hier, dass Broscius das sogenannte Sternsechseck nicht auch mit in seine Aufzählung aufgenommen hat, denn in seinem Sinne gehört es unbedingt mit herein; es ist fast, als hätte ihn hier eine unbestimmte Ahnung erfasst, dass seine Auffassung doch nicht den Kernpunkt der Sache treffe. Freilich verfuhr er nicht konsequent, denn das Achteck der zweiten Gattung mit der Winkelsumme $8R$, dessen ausdrücklich Erwähnung gethan wird, ist ebensowenig ein Sternpolygon wie jenes.

Können wir also dieser Eintheilungsmethode des Broscius durchaus nicht den ungetheilten Beifall schenken, wie jener

*) Offenbarer Druckfehler anstatt „Winkel". An zweiter Stelle fehlt die Zahl 7.

des Girard, so müssen wir um so mehr die Konsequenzen bewundern, welche er aus seinen Aufstellungen zog, und welche von Chasles mit folgenden Worten charakterisirt werden:

„Der Gesichtspunkt, unter welchem Broscius diese neuen Figuren betrachtet, indem er sie als Polygone mit abwechselnd ausspringenden und einspringenden Winkeln ansieht, in denen die Seiten sich nicht schneiden, führt ihn zu einer neuen Konstruktionsart dieser Figuren und zu einer besonderen Eigenschaft der Isoperimetrie.

Wir nehmen als Beispiel das gewöhnliche regelmässige Siebeneck und markiren die Mittelpunkte seiner sieben Seiten. Um die gerade Linie, welche zwei aufeinanderfolgende Mitten verbindet, lasse man sich das kleine Dreieck drehen, welches durch diese Gerade von dem Siebeneck abgeschnitten wird, so dass sich dieses Dreieck vollständig auf die Fläche der Figur legt. Ebenso drehe man um jede der sechs anderen Geraden, welche zwei aufeinanderfolgende Mitten verbinden, das kleine Dreieck, welches dadurch von dem Siebeneck abgeschnitten wird. Alle diese kleinen Dreiecke werden in ihrer neuen Lage ein neues Polygon mit abwechselnd ausspringenden und einspringenden Winkeln bilden.

Dieses neue Polygon von 14 Seiten hat offenbar denselben Umfang, als das vorgegebene Siebeneck.

Lässt man nun um jede Gerade, welche die Scheitel zweier aufeinanderfolgenden einspringenden Winkel verbindet, das kleine Dreieck, welches diese Gerade vom Polygon abschneidet, drehen, so wird man auf diese Weise ein drittes Polygon von 14 Seiten bilden, in welchem auch noch die Winkel abwechselnd ausspringen und einspringen, und dieses neue Polygon wird offenbar denselben Umfang mit dem zweiten und also auch mit dem ersten haben.

Die Flächen dieser drei Polygone sind von einander durchaus verschieden; weil das zweite innerhalb des ersten liegt, und das dritte innerhalb des zweiten.

Nun erkennt man leicht, dass das zweite Polygon kein anderes ist, als das Siebeneck der zweiten Gattung, in welchem die Stücke der Seiten, die innerhalb liegen, ausgelöscht sind; und dass ebenso das dritte Polygon kein anderes ist, als das Siebeneck der dritten Gattung, in welchem ebenfalls die Stücke der Seiten, die innerhalb liegen, ausgelöscht sind.

Man sieht hierin eine neue Art, die ausspringenden Polygone zu bilden, indem man sie, das eine aus dem andern, ableitet. Diese Art verdient bemerkt zu werden, vorzüglich wegen dieses besonderen Umstandes, dass alle diese Polygone, die auf diese Weise aus dem ersten abgeleitet werden, denselben Umfang haben".

Suchen wir zum Schluss zwischen Girard und Broscius mit wenigen Worten eine Parallele zu ziehen, so müssen wir sagen:

Girard hatte, im Gegensatz zu den anderen Mathematikern seiner Zeit, den ganz allgemeinen Vielecks-Begriff klar erfasst und für eine Reihe elementarer Figuren alle denkbaren Modifikationen angegeben, ohne sich in weitere Untersuchungen über die von ihm geschaffenen Gebilde einzulassen. In dieser Beziehung ergänzte ihn auf das vollständigste Broscius, der allerdings einen beschränkteren prinzipiellen Standpunkt einnahm, gerade dadurch aber die metrischen Relationen der in Frage kommenden Theorie wesentlich erweiterte.

Auch in ihren sonstigen Studien zeigen beide Männer mannigfache Berührungspunkte. Wie Girard zuerst die Flächen sphärischer Polygone berechnen lehrte, so gewann Broscius dieser Lehre eine andere wichtige Seite ab, indem er solche Gebilde als Mass körperlicher Winkel definirte[63]).

Wir haben, um sachlich Zusammengehöriges nicht zu trennen, die chronologische Folge bisher etwas ausser Acht gelassen. Wir müssen deshalb jetzt wieder eine Reihe von Jahren zurückgehen, um die Leistungen eines Mannes kennen zu lernen, der in der Lehre von den ebenen und räumlichen Sternfiguren ebenso wie in anderen Disziplinen der reinen und angewandten Mathematik eine reformatorische Thätigkeit entfaltet hat.

§. 8. Johann Kepler, den wir hier meinen, hatte im Jahre 1596 sein Erstlingswerk[64]) erscheinen lassen, welches die in Angriff genommene Frage allerdings nicht direkt förderte, in manchen Stücken aber doch bereits ahnen liess, was man von diesem Manne noch erwarten durfte. In dieser Schrift findet sich eine für den uns hier beschäftigenden Zweck noch

63) *Kästner*, S. 203. 64) *Kepler*, *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium celestium*, Tubingae 1596.

gar nicht ausgebeutete Stelle, welche uns für die Geschichte der Sternpolygone gleichwohl hohe Wichtigkeit zu besitzen scheint. Freilich hat Kepler selbst, als er zu einer späteren Zeit seine ausführlicheren Untersuchungen anstellte, von seiner Jugendarbeit keine Notiz genommen, aber trotzdem glauben wir, dass in jene frühe Epoche die Konzeption des allgemeinen Sternvieleckes bei ihm fällt. Er selbst schildert seinen Ideengang in nachfolgender Weise, nachdem er zuvor seine vergeblichen Bemühungen, über das Geheimniss des Weltalls ins Klare zu kommen, dargelegt hatte[65]).

„*Aestas pene tota hac cruce perdita. Denique levi quadam occasione propius in rem ipsam incidi. Divinitus id mihi obtigisse*

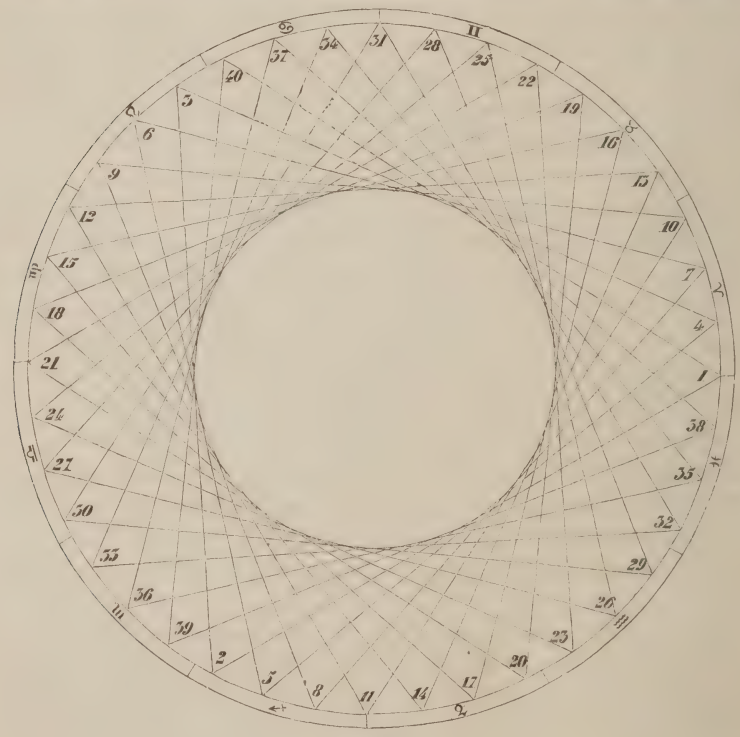


Fig. 37.

arbitrabar, ut fortuito nanciscerer, quod nullo unquam labore assequi poteram: idque eo magis credebam, quod Deum semper ora-

65) *Joannis Kepleri Astronomi Opera omnia, ed. Frisch,* Vol. I., Francofurti et Erlangae 1858. S. 108.

veram, siquidem Copernicus vera dixisset, uti ista succederent. Igitur die 9. vel 19. Julii anni 1595 monstraturus auditoribus meis conjectionum magnarum saltus per octona signa, et quomodo illae pedetentim ex uno trigono transeant in alium, inscripsi multa triangula, vel quasi triangula, eidem circulo, sic ut finis unius esset initium alterius (Haec vides sequenti schemate magnarum conjunctionum Saturni et Jovis)". (Fig. 37.) Das Hauptgewicht wird auf die Thatsache gelegt, dass der von den Verbindungslinien umhüllte Kreis dem vierten Theil des ersten gleich ist*), und unmittelbar hierauf beruht dann Kepler's Idee, den Planetensphären regelmässige Körper ein- und umzubeschreiben. Für uns hat das Weitere kein unmittelbares Interesse.

Wohl aber ersehen wir aus der Figur, dass Kepler in seinen Kreis ein reguläres sternförmiges Vierzigeck der höchsten Art eingeschrieben hat. Dergleichen kommt auch sonst wohl vor und rechtfertigt allein noch nicht unsere obige Bemerkung; wohl aber ist diess der Fall, wenn wir Kepler's Zählungsweise der einzelnen Ecken ins Auge fassen. Kein früherer Geometer hatte es gewagt, bei dieser Zählung von der Vorstellung eines gewöhnlichen Vielecks sich frei zu machen, welches mit dem betrachteten sämmtliche Ecken gemein hat.

Die einzig richtige Art und Weise, die Ecken eines Sternpolygons zu numeriren, rührt von Kepler her; hiemit war auch zuerst der Charakter eines solchen Vieleckes, dessen Perimeter sich selbst durchsetzt, deutlich ausgesprochen.

§. 9. Ueber zwanzig Jahre später kam Kepler aus einem ganz anderen Gesichtspunkte auf den nämlichen Gegenstand zurück und behandelte ihn nun streng systematisch. Die Lehre von den Vielecken bildete die Grundlage seiner berühmten Untersuchungen über die „Harmonie" des Weltgebäudes[67]),

*) Reitlinger[66]) macht hiezu folgende erläuternde Bemerkung: „Zum besseren Verständnisse fügen wir bei, dass, da die Umlaufszeit des Saturn beiläufig dreissig, die des Jupiter beiläufig zwölf Jahre beträgt, je eine Konjunktion derselben nach zwei Drittel Umlauf des ersten, und nach einem ganzen und zwei Drittel Umlauf des zweiten Planeten stattfinden muss, woraus wir unmittelbar einsehen, dass sie je nach einem Fortschritte des langsameren Planeten durch acht Zeichen des Thierkreises wiederkehrt".

66) *Reitlinger, Neumann* u. *Gruner,* Johannes Kepler 1. Theil, Stuttgart 1868. S. 131. 67) *Kepler, Harmonices mundi libri V,* Lincii Austriae 1619.

und unmittelbar nachdem er die Definition einer ebenen regelmässigen Figur gegeben hat, fährt er weiter fort[68]): „*Earum*“ — nämlich dieser Figuren — „*quaedam sunt primae et radicales, quae suos ipsae terminos non excedunt, quibus proprie convenit posita definitio: quaedam sunt auctae, quae sua veluti latera excedunt, continuatis alicujus radicalis lateribus non contiguis ad concursum: dicuntur stellae*“. Als Beispielsfiguren treten das gewöhnliche und das sternförmige reguläre Fünfeck auf. Hierauf folgt eine äusserst ausführliche auf das 10. Buch des Euclides basirte Diskussion der Aufgabe, reguläre Sternvielecke einem Kreise einzubeschreiben.

Als charakteristisches Beispiel für Kepler's Allgemeinheit der Auffassung muss gleich erwähnt werden, dass er mit Einzeichnung des Zweiecks oder Durchmessers beginnt, deren algebraisches Gegenstück die Auflösung einer Gleichung vom ersten Grade ist[69]). Es folgt das Quadrat und das reguläre Achteck, von dem ausdrücklich nur zwei Arten namhaft gemacht werden. „*Octogoni latus habet geometricam descriptionem ex angulis, nec minus etiam octogonicae stellae latus, seu subtensa tribus octavis partibus circuli . . .*“ Kepler hat sich also, wie wir diess bereits früher[70]) hervorhoben, auch hier von der irrigen noch dem Broscius anhaftenden Meinung emanzipirt, dass beim Achteck drei Gattungen unterschieden werden müssten. Auch beim Sechseck[71]) ist von einem dazu gehörigen Sterne keine Rede mehr.

Es folgt hierauf das gewöhnliche und sternförmige Zwölfeck und diesem das Zehneck. Beide Vielecke besitzen, wie sich leicht zeigen lässt, nur ein einziges sternförmiges, ebenso das Fünfeck, welches nun an die Reihe kommt[72]). Offenbar hat sich Kepler vorgenommen, eine elementare Theorie aller Vielecke zu geben, welche nur einen einzigen Stern zulassen, d. h. deren Konstruktion durch Auflösung einer quadratischen Gleichung geleistet werden kann. Deutlich erkannte er, dass mit der Existenz mehrfacher Sternpolygone die Unmöglichkeit einer rein geometrischen Verzeichnung unmittelbar ausgesprochen sei. Das erste Vieleck, welches ihm von der neuen Kategorie entgegentreten musste, war nothwendig das Siebeneck. Er

68) *Kepler, Opera omnia*, Vol. V. S. 84. 69) *Ibid.* S. 94. 70) *Günther*, S. 339. 71) *Kepler, Op. omn.* S. 96. 72) *Ibid.* S. 99.

sagt[73]): „*Heptagonus et figurae ab eo omnes, quae numerum laterum ex primis (sic dictis) unum habent, earumque stellae totaeque adeo classes ab iis derivatae extra circulum descriptione geometrica carent; in circulo, etsi laterum quantitas est necessaria, illud tamen ignorari aeque necesse est*". An diesen Satz knüpft dann Kepler eine der ihm eigenthümlichen teleologischen Bemerkungen; derselbe ist jedoch in der hier ausgesprochenen Allgemeinheit nicht richtig, sondern leidet die bekannten von Gauss normirten Ausnahmen.

Die totale Unmöglichkeit, mit Lineal und Zirkel hier etwas auszurichten, veranlasste Kepler den geometrischen Weg ganz zu verlassen und sich, wenn auch nicht ohne einiges Widerstreben, der Rechnung in die Arme zu werfen. Seine Entwickelungen in dieser Hinsicht dürfen den interessantesten Partieen in der Geschichte der Mathematik beigezählt werden; auch sind sie der Aufmerksamkeit der Historiker keineswegs entgangen und haben z. B. bei Chasles[74]) und Terquem[75]) Berücksichtigung gefunden. Das hauptsächlichste Interesse bieten dieselben allerdings für die Theorie der Gleichungen; indess ist auch für die Lehre von den Sternvielecken ein neuer wichtiger Punkt durch sie aufgeklärt worden, und eine kurze Darstellung dieser Leistung Kepler's wird deshalb wohl hier am Platze sein.

Der Boden, auf welchem sich dieselbe vollzog, war kein durchaus unangebauter. Vieta hatte, angeregt durch eine von Adrianus Romanus[76]) ausgehende Problemstellung, die Lehre von der Winkeltheilung fest begründet und bereits auch die Anzahl der reellen Wurzeln der hier in Frage kommenden Gleichungen bestimmt[77]). Von seinen Bemühungen hatte Kepler, wie aus einer späteren Stelle hervorgeht, vollkommen Kenntniss; indess schlug er hier zunächst einen anderen Weg ein, den ihm sein treuer Mitarbeiter Jobst Bürgi vorgezeichnet hatte[78]).

„*Objiciat hic mihi aliquis doctrinam analyticam, ab Arabe Gebri denominatam algebram, Italico vocabulo cossam: videntur*

---

73) *Kepler, Op. omn.* S. 101. 74) *Chasles*, S. 553 ff. 75) *Terquem, Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires, d'après M. Poinsot, Nouv. annal. de mathém.* Tome VIII. S. 136 ff. 76) *Arneth*, Geschichte der reinen Mathematik, Stuttgart 1852. S. 237. 77) *Ibid.* S. 237. 78) *Kepler*, S. 103.

enim in ea determinari posse omnis generis polygonorum latera. Verbi causa in septangulo sic procedit Iustus Byrgius, mechanicus Caesaris et Landgravii Hassiae, qui in hoc genere ingeniosissima et inopinabilia multa est commentus. Primo ille diametro circuli BP (Fig. 38.) *numerum 2 assignat, ut AB sit unitas totalis, qua in partes infinita sectione divisa, per illas longitudo lateris BC enumeretur. Deinde ponit, notam esse proportionem ipsius AB ad BC, quae tamen proportio demum quaeritur. In hac proportione continuitatem fingit, ut sicut est AB* 1 *ad BC* 1*R, sic sit* 1*R ad* 1*z, et* 1*z ad* 1&, *et* 1& *ad* 1*zz, et* 1*zz ad* 1*z*& *et sic perpetuo, quod nos commodius signabimus per apices sic,* 1, 1^{I}, 1^{II}, 1^{III}, 1^{IV}, 1^{V}, 1^{VI}, 1^{VII} *etc.*

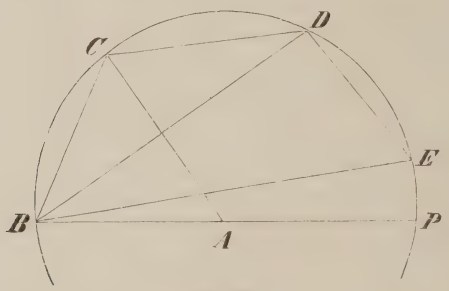


Fig. 38.

Zur Erzielung der Schlussgleichung wird konsequent der Lehrsatz des Ptolemaeus mehrmals hintereinander angewandt*). Dieselbe wird endlich in folgender Form erhalten: *„figurae nihili aeque valent quantitates hae:*

$$7^{I} - 14^{III} + 7^{V} - 1^{VII} \text{ vel } 7 - 14^{II} + 7^{IV} - 1^{VI}\text{“}.$$

*) Die Art und Weise, wie Kepler die Siebenecks-Resolvente eruirt, kann gewiss als charakteristisch dafür gelten, wie man in jener Zeit den Kalkül auf geometrische Probleme anwandte. Insbesondere gewinnt hiedurch die Hypothese an Wahrscheinlichkeit, welche wir bei einer früheren Gelegenheit betreffs einer Aufgabe von Faulhaber aufgestellt haben[79]). Dieselbe ist der von Kepler behandelten ähnlich, nur, da sie sich auf ein irreguläres Siebeneck bezieht, schwieriger; gewiss spielte auch bei ihrer Lösung das oben erwähnte Theorem eine Hauptrolle.

79) *Günther*, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Faulhaber, Sitzungsber. d. Erlanger phys.-med. Societ. Heft 6.

In unserer Zeichensprache würde diess heissen: Setzen wir das Verhältniss der Siebenecksseite zum Radius $= \sqrt{z}$, so wird z durch die Gleichung

$$7 - 14z + 7z^2 - z^3 = 0$$

gegeben sein.

Kepler erkennt sofort, dass diese Gleichung eine dreifache reelle Auflösung zulasse, und giebt auch die geometrische Bedeutung dieser drei Wurzeln an: *„unus enim valor est BC, alter BD, tertius BE“*. Es ist also in einem speziellen Falle die allgemeine Wahrheit zur Erkenntniss gebracht, dass es für jede Eckenzahl so viel verschiedene Polygone geben müsse, als die Resolvente reelle Wurzeln besitzt; ob diess freilich wirkliche, oder nur uneigentliche Polygone sind, steht dahin.

Den weiteren Betrachtungen Kepler's über das Verhältniss der arithmetischen zur geometrischen Lösung einer solchen Kreistheilungsaufgabe können wir, so fesselnd sie an sich sind, hier nicht weiter folgen; es genüge zu sagen, dass in seiner bekannten Manier die geistreichsten Bemerkungen abwechseln mit mysteriösen metaphysischen Andeutungen, welche Niemand an diesem Platze vermuthen würde. Von Wichtigkeit ist uns hier nur die folgende Stelle[80]), in welcher er sich induktorisch zur allgemeinen Auffassung der früher nur speziell erkannten Thatsache erhebt: *„Tertio hactenus et lateri figurae et lateri stellae cognominio cuique sua certa erat descriptio; in hac algebraica analysi illud maxime mirum est (quamvis geometram praecipue absterreat), quod non una via praestari potest, quod imperatur. Quanquam id non omni lege solutum est, sed, ut supra dici coeptum, tot sunt numeri facientes imperatum, quot sunt in figura subtensae seu diagonii longitudine differentes, ut in quinquangulo duo, in septangulo tres, unus pro latere, reliqui pro subtensis angulo. Itaque quicquid enunciatur tandem de proportione figurae propria, id commune est omnium ejus linearum proportionibus ad diametrum“*.

Ist diess nun auch nicht ganz richtig ausgedrückt — denn beim Achteck z. B. giebt es viererlei verschiedene Diagonalen und doch nur zwei verschiedene Polygongattungen — so erhellt doch daraus Folgendes:

80) *Kepler*, S. 106.

*Die Thatsache, dass die Anzahl der verschiedenen Diagonalen von Vielecken der Seitenzahl n gleich der Anzahl reeller Auflösungen ist, welche die Aufgabe, einen Kreis in n gleiche Theile zu theilen, zulässt, ward von Kepler zuerst bemerkt und auf dem Wege der Induktion allgemein festzustellen gesucht**).

Chasles[81]) bemerkt mit Recht, dass Kepler einen Vorläufer in Michael Stifel hat. „Man findet" — sagt er — „in seiner Algebra die Ausdrücke für die Seite und für die Diagonale des regelmässigen Fünfecks als Funktion des Radius des umbeschriebenen Kreises (siehe seine *Arithmetica integra*, Fol. 178); und wenn man auch annimmt, dass er diese Ausdrücke nicht durch die Auflösung der Gleichung des zweiten Grades erhalten hat, so musste ihre Form ihm zeigen, dass die auf diesen Linien gebildeten Quadrate die Wurzeln einer ähnlichen Gleichung sind".

Anmerkung. Die Historiker hatten bisher als Zeichen von Kepler's algebraisch-geometrischer Thätigkeit ausschliesslich dieses reguläre Siebeneck aufgeführt; aus den Pulkowaer Manuskripten[82]) geht aber auch hervor, dass er in ganz analoger Weise sich bei der Prüfung einer Neuneckkonstruktion verhielt, welche von dem bekannten Philosophen Giordano Bruno herrührte.

§. 10. Von der hier in kurzen Grundzügen entwickelten Theorie macht Kepler eine höchst eigenartige Anwendung. In Wirklichkeit ist es keine andere als eine astrologische. Denn Kepler hatte, trotzdem er sonst in allen Stücken hoch über seiner Zeit stand, mit der Sterndeutung nicht völlig gebrochen, wennschon dieselbe freilich bei ihm ein wesentlich anderes Gepräge trug, als das vulgäre. Kepler's Stellung zu dieser Afterwissenschaft scheint uns Förster sehr richtig mit folgenden Worten charakterisirt zu haben, welche wir, als für das Verständniss des Folgenden bedeutsam, hier wiedergeben wollen[83]). „Seinem erleuchteten Verstande widerstrebte das lächerliche Detail der Wahrsagungen, und doch schien es seiner

*) Wie dann weiter aus *n* die Anzahl der möglichen Vieleck-Arten folgt, vermochte erst Poinsot festzustellen.

81) *Chasles*, S. 556. 82) *Kepler*, S. 472. 83) *Förster*, Johann Kepler und die Harmonie der Sphären, Berlin 1862. S. 37.

Geistesrichtung nicht ganz fern zu liegen, so wie er eine Harmonie der Bewegungen, von der Sonne gesehen, annahm, auch in den Stellungen der Gestirne von der Erde aus auf das mögliche Vorkommen einfacher Zahlenverhältnisse wenigstens zu achten. Standen zwei Planeten einander am Himmel gerade gegenüber, so wirkten nach seiner Ansicht gewissermassen die Bewegungen ihrer Lichtstrahlen einander entgegen, standen sie gerade um $^1/_4$ Kreis von einander entfernt, so erfolgte ein eigenthümliches, bedingtes Zusammenwirken der Strahlen, und in ähnlicher Weise war Kepler geneigt, solche erregende gewissermassen optisch-harmonische Wirkungen der Gestirne auf das Seelenleben anzunehmen, welche allerdings einen leisen Einfluss auf die Lebens-Entwickelung auszuüben vermöchten". Um solche Effekte zweier Gestirne deutlich zu machen, bedient sich Kepler der vorher so ausführlich untersuchten Sternfiguren; es werden sukzessive verwendet das sternförmige Achteck, Zwölfeck, Zehneck und Fünfeck. Als charakteristisches Beispiel setzen wir seine *Propositio secunda*[84]) hierher (Fig. 39. 40.).

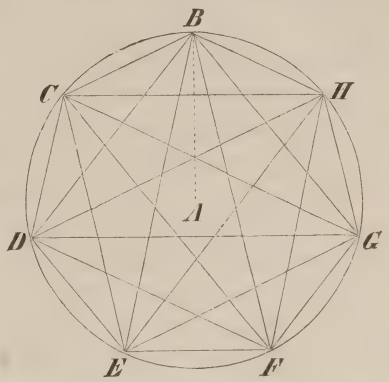


Fig. 39.

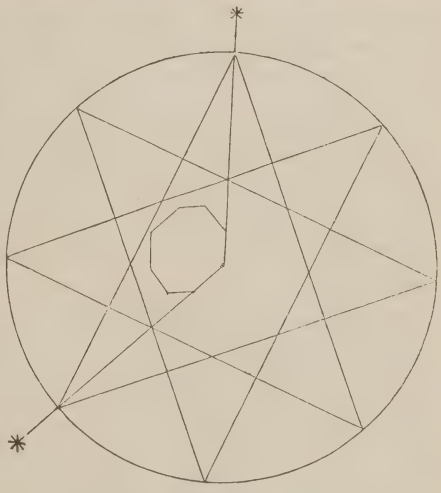


Fig. 40.

„*Major est radiationum cognatio cum figuris regularibus, quam erat consonantiarum.*

Probatur primum a circumferentiali figura. Nam ubi circulus

84) *Kepler*, S. 237.

integer, ibi et figura regularis integra: sed magis est circulus integer in dimetiendis radiationum angulis, per I, ergo et figura respectu radiationum magis ut integra considerari potest. Contra in consonantiis, ut circulus ejusque partes in rectum poterant extendi salvis consonantiis, sic etiam omnia figurae latera in eandem et unam rectam extendi poterant eaque cum uno figurae latere rectilineo facere consonantiam. Hoc vero pacto uti circulus, sic etiam figura rectilinea suam figurationem amittit, ut figura amplius non sit.

Probatur secundo a centrali figura. Anguli sunt figurarum elementa: jam duo radii faciunt angulum in centro, qui aliquoties repetitus consummat figuram, ut apparet ex schematibus hisce. Id autem non fiebat in ortu consonantiarum, nullus enim ibi fuit respectus anguli in centro. Magis igitur familiares sunt figurae aspectibus, quam consonantiis".

Der Sinn dieser an sich ziemlich dunklen Stelle ist, gehörig verallgemeinert, dieser: Zwei an der Himmelskugel befindliche Planeten üben auf die gleichweit von beiden entfernte Erde gleiche Kräfte aus, deren Gesammtwirkung, wie wir sagen würden, nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte berechnet werden muss. Je kleiner der Bogen, um den die Sterne abstehen, um so grösser wird die Resultante sein. Es werden jedoch nur solche Winkel in Betracht gezogen, welche als Innenwinkel regulärer Sternvielecke auftreten, und mit Rücksicht hierauf würden Kepler's in verschiedenen Propositionen zerstreute Sätze zu nachstehendem Gesammtresultate zu vereinigen sein:

Die von zwei Sternen auf das Erdzentrum ausgeübten Kräfte erzielen eine um so grössere Wirkung, je höher die Artenzahl des Polygons ist, als dessen Innenwinkel jener Zentriwinkel betrachtet werden kann.

§. 11. Wir haben bisher lediglich ebene Sternfiguren in's Auge gefasst; dieselben haben jedoch bekanntlich ihr Analogon auch im Raume. Wie wir später zeigen werden, hat Poinsot die wichtige Entdeckung von vier Körpern gemacht, welche den regelmässigen Körpern der Alten mit demselben Rechte zur Seite gestellt werden müssen, wie die Sternvielecke den gewöhnlichen Polygonen. Den Streit darüber, ob Kepler wirklich als der eigentliche Begründer dieser schönen Theorie anzusehen sei, werden wir am Schlusse dieses Paragraphen

eingehender zu besprechen haben; für jetzt wollen wir nur zusehen, ob in der That solche Gebilde sich bei Kepler oder vielleicht gar noch vor diesem nachweisen lassen.

Terquem[85]) in seiner bereits zitirten Notiz scheint der zuletzt erwähnten Ansicht zu huldigen. „*À la manière dont Kepler en parle, il ne paraît pas que ces corps soient de son invention: on n'en connaît pas l'auteur*". Er scheint, obwohl er dies nicht eigentlich ausspricht, die erste Idee dieser Körper bei dem bekannten Nürnberger Jamnitzer suchen zu müssen, dessen perspektivisches Werk er beschreibt. „*L'ouvrage, d'une magnifique exécution, contient plus d'une centaine de corps mis en perspective. La seconde partie, qui devoit contenir les règles, n'a pas paru. L'auteur, né vers 1508 à Nuremberg, y est mort le 15 décembre 1586. On trouve une description détaillée de cet ouvrage, d'une extrême rareté, dans l'Histoire de Mathématiques de Kaestner* (tome II, page 19, 1797)". Sehen wir uns diese angebliche Priorität Jamnitzer's nunmehr etwas genauer an und vergleichen wir sein Werk[86]) mit Kepler's Buch.

Das genannte Werk enthält auf seinen Figurentafeln allerdings einen bewundernswerthen Formenreichthum, und man kann die in der That grossartige stereometrische Schaffungskraft des auch als Künstler hochberühmten Verfassers nur bewundern. Der Krystallograph Marx[87]) bemerkt ausdrücklich, dass einzelne seiner Körper geradezu als Krystallmodelle betrachtet werden könnten, und dass gewiss noch manche neuaufgefundene Form in Jamnitzer's Zeichnungen antizipirt sein möchte. Unter solchen Umständen wäre es freilich nicht zu verwundern, wenn auch ein oder das andere Sternpolyëder sich hier vorfände, natürlich ohne dass dem Autor Kenntniss von dessen eigentlicher Natur zugeschrieben werden dürfte.

Der eine Körper, welchen wir in Fig. 41. abbilden, hat

---

85) *Terquem*, S. 138. 86) *Wenzel Jamnitzer, Perspectiva Corporum Regularium.* Das ist, Ein fleyssige Fürsuweyng, Wie die Fünff Regulirten Cörper darvon Plato im Timaeo Unnd Euclides in sein Elementis schreibt, Durch einen sonderlichen, newen, behenden und gerechten weg, der vor nie im gebrauch ist gesehen worden, gar Künstlich in die Perspective gebracht, und darzu ein schöne Anleytung, wie auss denselbigen Fünff Cörpern am Endt, gar viel andere Cörper, mancherley Art und gestellt, gemacht, und gefunden werden mögen, Nürnberg 1568. 87) *Marx*, Geschichte der Crystallkunde, Carlsruhe 1825. S. 25.

nun in der That grosse Aehnlichkeit mit jenem Sternpolyëder, welches wir im Anschluss an die von Wiener eingeführte Terminologie als zwölfeckiges Sternzwölfflach[88]) bezeichnen. Von noch grösserem Interesse jedoch ist Fig. 42., denn es ist kein Zweifel, dass Jamnitzer hier ein wirkliches Sternpolyëder dargestellt hat.

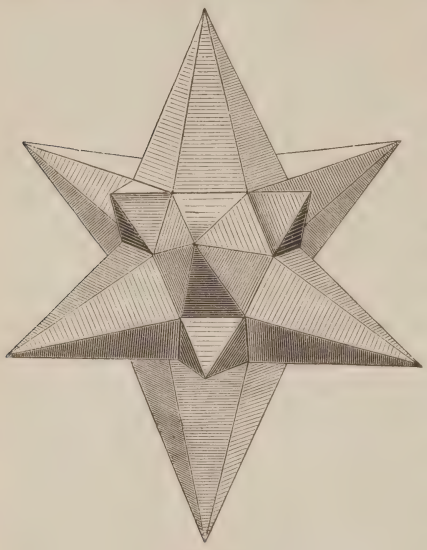


Fig. 41.

Das erste Sternpolyëder, welches uns in der Geschichte der Mathematik entgegentritt, ist ein solches, wie sie bei Kepler nicht vorkommen, nämlich das sterneckige Zwölfflach.

Hieraus ergiebt sich bereits, dass diese isolirte Erscheinung auf Kepler ganz einflusslos geblieben ist; sein Standpunkt war auch hier ein weit universellerer und systematischerer.

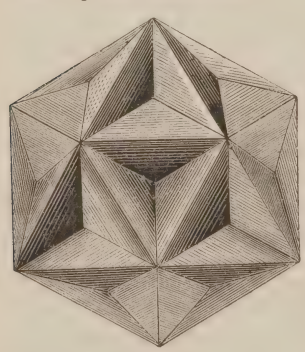


Fig. 42.

Kepler giebt im zweiten Buche der *„Harmonice"* eine sehr eingehende Beschreibung der fünf regelmässigen Körper, deren Netze er auch zeichnen lehrt. An dieselbe schliesst sich dann eine ebenfalls ausführliche Abhandlung über die halbregulären Körper, welche einer nicht ganz sicher verbürgten Nachricht zufolge von Archimedes herstammen. Zwischen diese beiden Kategorieen wird dann eine eigene dritte eingeschoben, deren Wesen folgendermassen[89]) charakterisirt wird:

„Addi possunt congruentiis perfectissimis regularibus duae etiam

88) *Wiener*, Ueber Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864. S. 23. 89) *Kepler*, S. 122.

aliae congruentiae, stellarum duodecim planarum pentagonicarum, et duae semisolidae, stellarum octangulae et decangulae.

Claudunt enim pentagonicae solidas figuras aculeatas undique, quarum una fit duodecim angulorum quinquelinearium, altera viginti angulorum trilinearium; illa trinis angulis insistit, haec quinis simul; illa pulchrius super angulum erigitur, haec rectius sedet, incumbens in quinos (Fig. 43. 44.). *In his etsi forinsecus non apparet regulare planum, sed ejus loco triangulum aequicrurum pentagonicum, quina tamen hujusmodi semper in unum idemque planum competentia, occultum sub soliditate quinquangulum, veluti corsuum circumstant faciuntque cum eo dictam stellam pentagonicam, seu germanico idiomate pedem Truttae, Theophrasto Paracelso signum sanitatis. Idea corporis quodammodo eadem est, quae sui*

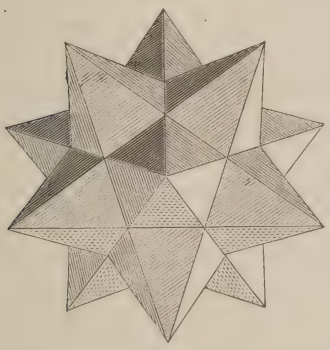


Fig. 43.

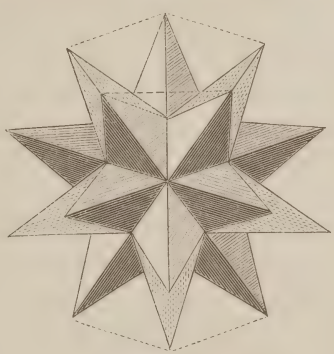


Fig. 44.

plani, nam ut in hoc, sc. in stella quinquangula, binorum semper triangulorum latera in unam rectam competunt, quae parte sui interiore fit basis uni exteriori triangulo, latus vero intimo quinquangulo, sic in solido semper quinorum solidorum angulorum triangula singula aequicrura competunt in unam planitiem, quorum quinque triangulorum seu stellae intima medulla et cor, quinquangulum, fit basis in una superstantis anguli solidi, vel in altera, superstantium quinque solidorum. Est autem tanta cognatio figurarum harum unius cum dodecaëdro, alterius cum icosaëdro, ut videantur hae, praesertim dodecaëdron, trunca quodammodo et mutila, si cum iis aculeatis comparentur.

Octangulae vero et decangulae stellae lateribus suorum radiorum, quae semper in primo et quarto, duobus transitis, congruent in unam rectam, binae semper et binae congruunt faciuntque cubum

millae quenda, hae dodecaëdron quoddam, non angulatas sed auriculatas figuras, quia duobus planis angulis coaptatis, hiatum fieri necesse est, qui claudi non potest. Ergo per 11. semisolida tantum est congruentia.

Perfectissimae dicuntur congruentiae illae solidae, hae semisolidae, quia ipsis competit 6. definitio hujus libri quoad solididatem, planitiebus vero ipsis competit definitio figurae perfectae, quae est libro I. secunda, sunt sc. secundario perfectae. Nec absurde dicimus, semisolidam perfectissimam, quia innuimus inchoari aliquid, cui non 9. vel 10., sed cui 6. def. competeret, si perfici posset".

Die beiden von Kepler hier neu gebildeten Körper sind das sogenannte zwölfeckige und zwanzigeckige Sternzwölfflach. Auf das erstere kommt er noch bei einer anderen Gelegenheit zu reden, da nämlich, wo er die kosmische Bedeutung bespricht[90]), welche er in seiner Jugendarbeit dem Dodekaëder beigelegt hatte. *„Habet hoc conjugium et stellam solidam, cujus genesis est ex continuatione quinorum planorum dodecaëdri ad concursum omnium in puncto unico; vide genesin ejus libro II."*

Der Vollständigkeit halber ist noch zu erwähnen, dass Kepler die beiden in Rede stehenden Körper auch noch in einer anderen perspektivischen Ansicht abgebildet hat; wir haben hier die übersichtlicheren Bilder gewählt.

Eigenthümlicherweise hat Poinsot, obschon er die Kepler'sche Abhandlung zitirt, von jenen Sternpolyëdern gar nicht gesprochen. Es darf hier natürlich nicht entfernt an ein Plagiat gedacht werden, wohl aber scheint es, als hätte der französische Autor den Text nicht näher beachtet und Kepler's Abbildung einen anderen Sinn unterlegt, als dieser selbst. Diese Auffassung des Sachverhältnisses scheint korrekt, wenn wir berücksichtigen, dass viele Jahre später noch der französische Akademiker Bertrand sich ganz im ersteren Sinne ausgesprochen hat. Bertrand hatte[91]) rückhaltlos die Erfindung der Sternpolyëder seinem Landsmanne Poinsot zugeschrieben, und scheint daraufhin von unbekannter Seite auf Kepler's Priorität hingewiesen worden zu sein. Hierauf entgegnete er in folgender Weise[92]): *„Deux de ces polyèdres sont dessinés et décrits dans des ouvrages antérieurs, cela est parfaitement exact. On peut voir dans les*

90) *Kepler*, S. 272. 91) *Bertrand, Comptes rendus de l'acad. des sciences*, Tome 46. S. 79. 92) *Ibid.* S. 117.

„Harmonices mundi", de Kepler page 182(1), *un dessin très-bien fait du dodécaèdre de seconde espèce*; *mais Kepler et les auteurs qui ont parlé de ces polyèdres, antérieurement au Mémoire de M. Poinsot, n'ont jamais soupçonné qu'ils fussent réguliers: ils le considéraient comme formés par soixante faces triangulaires et non par douze pentagones réguliers; ils n'ont pas plus de droits à être cités dans l'histoire de la découverte des polyèdres réguliers, que Tobie Mayer et Bradley n'en ont la découverte d'Uranus, qu'ils avaient aperçu longtemps avant Herschel, mais en le prenant pour une étoile".*

Man muss gestehen, dass diese Auslegung etwas Bestechendes hat; sie sucht einen neuen Beleg zu der in der Geschichte der Mathematik wohl allgemein anerkannten Wahrheit beizubringen, dass gar oft eine Erfindung oder Entdeckung gemacht worden, ohne dass auch sofort deren eigentliche Bedeutung erkannt wurde. Allein in diesem Falle hält eine solche Auffassung nicht Stich; zu deutlich sprechen gegen sie die eigenen Worte des Autors

Dies hat auch bereits im Jahre 1862 Baltzer[93]) gegen Bertrand geltend gemacht. Dem Proteste Baltzer's hat sich dann noch eine auf diesem Gebiete besonders berufene Autorität, nämlich Wiener, angeschlossen. Wiener[94]) reproduzirt die oben wiedergegebene Stelle und fügt hinzu: „Kepler setzt also ausdrücklich die theilweise im Innern des Körpers befindlichen regelmässigen Sternvielecke, als die Seitenflächen des Körpers, den äusserlich allein sichtbaren gleichschenkligen Dreiecken, welche nur Theile jener Flächen bilden, entgegen. Er erläutert dies noch weiter; doch scheint mir das bisher Ausgezogene vollkommen genügend, um Bertrand's Aeusserung zu widerlegen".

Indess muss, sollte man meinen, die blosse Lektüre von Kepler's Text das Hinkende des von Bertrand beliebten Vergleiches mit jenen Astronomen erkennen lassen, welche einen Wandelstern beobachteten, aber noch nicht in dieser seiner wahren Eigenschaft erkannten.

§. 12. Ueberschauen wir, an einem stationären Punkte

---

93) *Baltzer*, Zur Geschichte der regulären Sternpolyëder, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1862. S. 1046. 94) *Wiener*, Bemerkungen über die regelmässigen Sternvielflache, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 12. Band. S. 174.

angelangt, die bisher vor uns vorübergegangenen Leistungen, so tritt uns an denselben, mit einer einzigen nennenswerthen Ausnahme, das Gemeinsame entgegen, dass ausschliesslich die regelmässigen Figuren in ihr Bereich fallen. Hatte man metrische Beziehungen mit in Betracht gezogen, so beschränkte man sich auf die Winkel und Seiten, ohne dem Flächeninhalt irgend Aufmerksamkeit zu schenken. Dies musste sich nothwendig ändern, sobald man dazu übergieng, den allgemeinen Begriff eines Vieleckes zu formuliren. Es vergiengen jedoch weit über 100 Jahre nach Kepler's Zeit, ehe sich dieser Umschwung zu vollziehen begann.

Das Wort „Polygon" im Sinne der Alten bezog sich lediglich auf geradlinig begrenzte Figuren mit ausspringenden Winkeln. Dass diese Definition nicht ausreiche, musste sich bald fühlbar machen; den ersten leisen Ansatz hiezu glauben wir bei Leonardo Fibonacci zu bemerken, da wo er[95]) bemerkt*): „*Praeterea est figura, quae barbata dicitur, similiter diversa habens latera, in qua una ex dyametris cadit interius, altera vero exterius, ut in quadrilatero. defg., cujus dyameter cadit interius, altera vero exterius a puncto .f. in puncto .d., cadit linea .f d. extra quadrilaterum .d.e.f.g.: hujus itaque figure aream habebis, si aream trigonj .deg. cum area trigonj .feg. coadunaveris; vel si ex area trigonj .def. dempseris aream trianguli .d.g.f.*". Der erste Versuch zur Flächenbestimmung eines von der gewöhnlichen Art abweichenden Vieleckes (Fig. 45.).

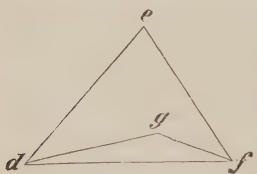


Fig. 45.

Bereits oben (s. 6.) gedachten wir ausführlicher der Verdienste, welche sich Albert Girard um die Begründung des hier in Rede stehenden fundamentalen Kapitels der Geometrie erworben hat. Indem er sein Eintheilungsprinzip auf die verschiedene Anzahl von Flächenstücken im älteren Sinne basirte, als deren Summe das Sternvieleck zu betrachten ist, hatte er auch bereits den Schlüssel

*) Cantor[96]) führt Seite 84 an.

95) *Scritti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni*, Volume II., Roma 1862. S. 83. 96) *Cantor*, Rezension hiezu, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8. Jahrg. Literaturzeit. S. 44.

zur Bestimmung des Flächeninhaltes in der Hand. Leider hat uns sein früher Tod der Möglichkeit beraubt, statt kurzer Andeutungen eine systematische Durchführung vor uns zu sehen.

Der Mann, welcher die von Girard flüchtig hingeworfene Idee aufnahm und mit höchstem Fleisse aufs gründlichste verarbeitete, ist ein auch sonst bedeutender nur leider wenig gekannter Mathematiker, A. L. F. Meister (1724—1788). Es gehörte in der Zeit seines Wirkens, wo durch Euler, d'Alembert, Bernoulli etc. die Analysis alle mathematischen Kräfte mit Beschlag belegt hatte, viel origineller Sinn dazu, diesem grossen Strome fernzubleiben und ein so unergiebig scheinendes Feld, wie das der Elemente der Geometrie, zu bebauen. Jedenfalls musste ein solcher Forscher sich völlig mit dem Gedanken vertraut machen, für lange Zeit unverstanden zu bleiben. In dieser Hinsicht ähnelt Meister's Stellung in der Wissenschaft vielfach der eines anderen originellen Kopfes jener Epoche, des Danziger Mathematikers Kühn, dessen Versuche, die uns jetzt so geläufig gewordene laterale Erweiterung des Zahlgebietes anzubahnen, selbst bei erleuchteten Geistern auf absolutes Missverständniss stiessen, wie uns dies Lambert's Briefwechsel[97]) in schlagendster Weise darthut.

§. 13. Meister setzt uns in der Vorrede seiner Abhandlung die Beweggründe, welche ihn bei Abfassung derselben leiteten, mit grosser Redseligkeit auseinander[98]). Er beginnt gleich mit der Bemerkung, dass der Begriff einer ebenen Figur, wie man ihn aus den in der Natur vorkommenden Körpern abstrahire, nothwendig ein viel zu enger sei. Suche man diesen Begriff zu erweitern, so müsse man Linienzüge ins Auge fassen, die sich entgegenkommen, durchsetzen, Knoten und vielfache Punkte aufweisen. „*Hujus indolis figurae constituendis naturalium corporum limitibus aeque inhabiles sunt, ac illarum perimetri agrorum finibus describendis.*“ In die Anfangsgründe der Geometrie nehme man diese verallgemeinerte Betrachtungsweise gar nicht auf, sei es, dass man den Anfängern nicht

97) *J. H. Lambert's* deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von Bernoulli, 4. Band, Berlin, Dessau und Leipzig 1784. S. 387 ff.
98) *Meister, Generalia de genesi figurarum planarum, et inde pendentibus earum affectationibus*, Novi Comm. Soc. Reg. Scient. Gotting., Tomus I. S. 144 ff.

Gebilde vorführen wolle, für die in der Körperwelt das reale Substrat fehlt, sei es, dass man überhaupt solche Untersuchungen, als für die Praxis ohne Belang, ignorire. Und doch sei auch letzteres nicht eigentlich der Fall: *„Fieri enim potest ut aliqua theoremata, quae certis conditionibus adstringenda videbantur, latius patere vel pure valere deprehendantur, relata ad omne figurarum genus"*. Im weiteren Verlaufe der Einleitung verbreitet sich dann der Autor über die Anwendung seiner Methode auf die verschiedensten planimetrischen Probleme, insbesondere über die von Tobias Mayer gestellte Aufgabe *„de geometrica figurarum in triangula transformatione"*.

Im ersten Paragraph[99]) wird hervorgehoben, dass die beiden Begriffe „gerade Linie" und „Bewegung" zur Erforschung der Beschaffenheit ebener Figuren ausreichend seien. Hierauf folgt[100]) die Erzeugung jeder solchen Figur durch parallele Fortschiebung einer veränderlichen Strecke; ist diese Länge einmal Null, so entsteht ein Einschnürungspunkt, und man muss wissen, ob in einem solchen Punkte zwei Zweige blos zusammenlaufen oder aber sich durchsetzen. Dies könnte durch geeignete Beisetzung von Buchstaben allenfalls erreicht werden; *„verum multo luculentius et notabilius signum erit, si perimetro, veluti fieri solet in mappis geographicis, juxta totum ejus tractum adlineatur, a dextris vel a sinistris, peculiare aliquod pigmentum, quod non limitis modo decursum, verum et areae hinc inde adjacentis relativum valorem, prodat"*. So hat denn hier Meister ein Hülfsmittel für die Topologie angegeben, welches noch heute ganz allgemein in Gebrauch ist, ohne dass doch der Name des Urhebers auch nur genannt würde. Jetzt ist auch das oben berührte Dilemma ausgeglichen: *„Limitum occursus erit, ubi angulis in vertice oppositis idem color est; limitum intersectio, ubi angulis oppositis diversus color"*. Für gewöhnliche Zwecke muss natürlich dem Farbensaume die Schraffirung substituirt werden.

Es folgt dann eine prinzipiell bedeutsame Festsetzung:

Als positiv werden diejenigen Flächenräume in Rechnung gebracht, deren Perimeter eine ausschliesslich nach Innen gerichtete Färbung (Schraffirung) zeigt; als negativ die übrigen.

So ist in dem von Meister selbst angegebenen Schema (Fig. 46.) bezüglich *I*, *II*, *III* und *IV* positiv, 1, 2, 3 negativ,

99) *Ibid.* S. 148. 100) *Ibid.* S. 149.

und hiebei ward ein Theilchen von *III* doppelt gezählt. Diesen Weg zur Flächenbestimmung anzuwenden, hält jedoch Meister im Allgemeinen nicht für rathsam: „*Vix est ut moneam, quo saepius recta describens motum reciprocet, et eadem plani spatia repetat, tanto magis impeditum fore hac via partium recensum*".

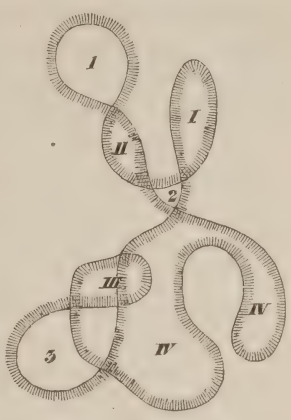


Fig. 46.

Die Flächenausmessung geschieht dann in einer Weise, welche wir, etwas abweichend von Meister's Darstellungsweise[101]), so charakterisiren würden: Man lege ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem zu Grunde, ziehe Parallelen zur Abszissenaxe durch alle Punkte, in welchen die Anfangskurve ein relatives Ordinaten-Maximum oder -Minimum aufweist, und summire die einzelnen gemischtlinigen Trapeze.

Bis jetzt war stets eine Parallelbewegung der beschreibenden Geraden vorausgesetzt worden, d. h. man dachte sich die Ebene als aus Parallelogrammen zusammengesetzt. Natürlich hat das polare System die gleiche Berechtigung, und demgemäss handelt Meister's Paragraph III[102]) von der „*Descriptio figurarum per motum rectae circularem*". Was von der ersten Erzeugungsart galt, gilt *mutatis mutandis* auch für die zweite.

Nunmehr wird das Problem noch mehr verallgemeinert und in Paragraph IV[103]) die „*Descriptio figurarum per motum rectae quemcunque*" vorgenommen. Jede unendlichkleine willkürliche Bewegung einer Geraden lässt sich zusammengesetzt denken aus einer Elementarverschiebung und einer Elementardrehung — ein kinematischer Satz, von dessen Vorkommen an dieser Stelle die Geschichtschreiber der Mechanik noch keine Notiz genommen zu haben scheinen. Hält man einen bestimmten Punkt einer mehr nach Aussen gelegenen Umfangslinie fest — es wird hiebei vorausgesetzt, dass der Perimeter in mehreren Windungen einen inneren Punkt umkreise — und sucht die jenen Punkt enthaltende Lage der beschreibenden Geraden zu fixiren, so kann dies dadurch geschehen, dass man von jenem Punkt an eine innere Windung eine Berührungslinie zieht.

101) *Ibid.* S. 153. 102) *Ibid.* S. 154. 103) *Ibid.* S. 159.

Nachdem bisher von ganz illegitimen Kurven*) die Rede gewesen war, geht jetzt die Untersuchung auf den speziellen Fall des geradlinigen Vielecks zurück[105]). Als Winkel des Vielecks wird von den beiden an einem Eckpunkte befindlichen immer derjenige gezählt, in welchen die Schraffirung der beiden Schenkel hineinfällt. So ist in dem sich zweimal selbst durchschneidenden Fünfeck (Fig. 47.) *a b c d e* der Winkel bei

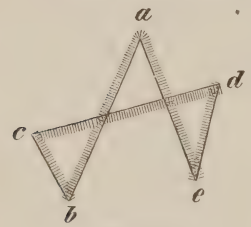


Fig 47.

a erhaben zu nehmen, die vier anderen Winkel dagegen hohl. Jedoch wird dann auch hier wieder der ganz allgemeine Fall beliebiger Linienzüge mit berücksichtigt, indem wieder positive und negative Zellen eingeführt werden. *„Deinde palam est, complicationes positivas tollere totidem numero negativas; ut si in tota figura utrarumque numerus aequalis fuerit, illa redeat ad simplicem figuram et angulorum summam efficiat, solito more ex laterum numero colligendam“* (Fig. 48.).

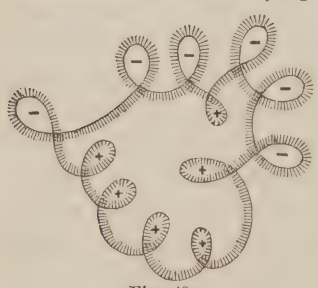


Fig. 48.

Die Einbeschreibung allgemeiner Vielecke in Kreise[106]) wird auf folgende originelle Idee zurückgeführt. Man denke sich den Kreis *p* mal nacheinander durchlaufen, so dass gewissermassen *p* unendlich nahe konzentrische Kreisumfänge vorliegen. Auf denselben nehme man sukzessive m_1, $m_2 \ldots m_p$ Punkte und verbinde dieselben so, dass der erste mit dem zweiten, der zweite mit dem dritten, ... der

*) Es ist nicht ohne historisches Interesse zu bemerken, dass der hier besprochene erste Versuch, regellose Kurven geometrisch zu untersuchen, sich chronologisch nahezu mit dem ersten Auftreten solcher Gebilde in der Analysis deckt. Bekanntlich ward man auf dieselben in dem berühmten zwischen Euler, d'Alembert und D. Bernoulli bezüglich des Problems der schwingenden Saiten ausgebrochenen Streite[104]) geführt.

104) *Riemann*, Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Abhandl. d. kön. Gesellsch. zu Göttingen, 13. Band. S. 87 ff. 105) *Meister*, S. 149. 106) *Ibid.* S. 162.

$m_p$te wieder mit dem ersten verbunden ist. Ist z. B. $p = 3$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 3$, so erhält man das in Fig. 49. wiedergegebene Zehneck *a b c d e f g h i k*. Die drei Peripherien müssen als zusammenfallend gedacht werden; natürlich müssen auch in jeder einzelnen Gruppe die Punkte so gewählt werden, dass ihre aufeinanderfolgenden Verbindungslinien sich gegenseitig nicht durchkreuzen. *„Luculenter apparebit, figuras multicipli inscriptas, totidem habere perimetri complicationes positivas, quot circuli peripheriae illam circumscribunt, excepta una."*

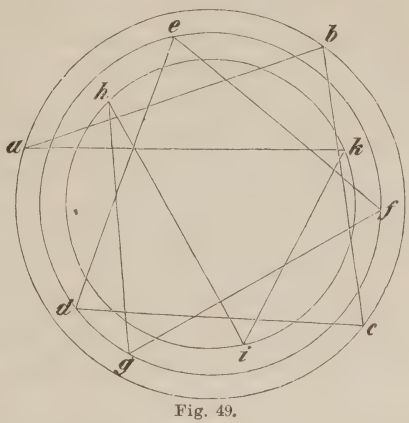


Fig. 49.

Die *„complicationes negativae"* kommen dadurch herein, dass der den mehrfach gezählten Kreis beschreibende Punkt nicht stets im gleichen Sinne sich bewegt. Alsdann wendet sich unser Verfasser zu einem uns hauptsächlich interessirenden Gegenstande, zur Diskussion der regelmässigen Figuren[107]).

Zunächst wird darauf aufmerksam gemacht, dass für jede beliebige Eckenzahl (> 3)*) mehrere Arten regulärer Polygone existiren müssen. Um diese Arten charakteristisch darzustellen, wird, wie schon früher, von dem Bilde eines mehrfach zählenden Kreises Gebrauch gemacht.

Da das $p$te von dem $(m - p)$ten mEck nicht verschieden ist, so gibt es für die Eckenzahl m, je nachdem sie gerade oder ungerade ist, im Allgemeinen

$$\frac{m}{2} \text{ und } \frac{m+1}{2}$$

verschiedene mEcke. Aber von diesen gehören nicht alle eigentlich hieher. Die weitere Untersuchung, wie diese uneigentlichen Fälle ausgemustert werden müssen, ist von einfacher Eleganz und gipfelt in dem allerdings blos induktorisch

*) Streng genommen machen auch 4 und 6 eine Ausnahme.

107) *Meister*, S. 163.

festgestellten Satz: *Lässt sich die Eckenzahl pmal in zwei Summanden zerlegen, welche einen gemeinsamen Theiler besitzen, so sind p Vielecke, als durch Wiederholung anderer Vielecke von geringerer Eckenzahl entstanden, von der ursprünglich berechneten Anzahl abzuziehen.*

Hieran schliesst sich dann eine allerdings auch nur am speziellen Falle erörterte Unterscheidung der Kennzeichen, welche bestimmen, ob das durch Wiederholung das ganze mEck gewissermassen erschöpfende Polygon ein gewöhnliches oder sternförmiges (*complicatum*) ist.

Hierauf bestimmt Meister den *„numerus complicationum"*, welcher sich identisch erweist mit der Anzahl der aufeinandergelegten Kreisumfänge. Für die Grösse des Vieleckswinkels im $n$ten mEck (mEck der $n$ten Art) wird die Formel

$$\pi - \frac{2n\pi}{m}$$

gegeben.

Auch über den Flächeninhalt der regelmässigen Polygone werden Betrachtungen angestellt. Es findet sich der Satz, dass dasjenige Vieleck die höchste Ordnungszahl besitzt, dessen Zentriwinkel am wenigsten von $\frac{\pi}{2}$ abweicht; dass diejenigen Polygone verschiedener Ordnungszahl flächengleich sind, deren Zentriwinkel gleichviel von diesem Werthe im entgegengesetzten Sinne differiren etc. Zum Schluss folgt dann noch eine recht hübsche Anwendung der vorher entwickelten Prinzipien auf die Bestimmung der Flächeninhalte solcher regelmässigen Vielecke, welche durch Seitenverlängerung aus einem gegebenen gewöhnlichen F hervorgehen, wobei freilich auch solche Figuren, die aus mehreren in einander verschränkten Vielecken bestehen, mitgerechnet werden müssen. Bezeichnet man die Flächeninhalte der verschiedenen so erzeugten Polygone sukzessive mit

$$F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots,$$

den Zentriwinkel des ersten mit a, so bestehen die Relationen

$$F : F_1 : F_2 : \ldots = tg^2 a : tg^2 2a : tg^2 3a : \ldots$$

Auch wird angedeutet, dass und wie sich dieses Theorem für irreguläre Figuren generalisiren liesse.

Im weiteren Verlaufe betrachtet Meister[108]) ein beliebiges reguläres Polygon, denkt sich eine Seite desselben verlängert und lässt dann das Polygon eine Reihe von Umwälzungen dergestalt machen, dass immer eine neue Seite mit jener ersten zusammenfällt. Er gelangt so dazu, einen von Maupertuis[109]) für gewöhnliche reguläre Vielecke bewiesenen Lehrsatz auf solche höherer Gattungen auszudehnen. Um die Sache noch von einer anderen Seite zu betrachten, denkt sich Meister die Figur konstruirt, welche man erhält, wenn man die sukzessiven Lagen des nämlichen Eckpunktes mit einander verbindet, und lässt nun, im Anschluss an die oben beschriebene erste Erzeugungsart, eine Gerade parallel mit sich selbst so sich bewegen, dass der eine Endpunkt den Umfang des Vielecks, der andere den jener Hülfsfigur beschreibt. Durch Zerlegung des überstrichenen Flächenraumes in Trapeze kommt er zu einer ganz allgemeinen Formel: Sind $a, b, c \ldots (\pi - c), (\pi - b), (\pi - a)$ die verschiedenen im Vieleck auftretenden Winkel, so besteht, wenn die Seite $= 1$, die Eckenzahl $= m$, die Artenzahl $= n$ gesetzt wird, die Gleichung

$$-(n-2)\sin a + (n-4)\sin b - (n-6)\sin c + \ldots = 0.$$

Benützt ward die bekannte Relation: $\sin a = \sin(\pi - a)$. Allerdings gilt diese Formel nur für ungerade m, indessen lässt sich eine analoge Betrachtung auch für gerade anstellen.

Der folgende zehnte Abschnitt *„De figurarum conjunctione et separatione“* hat eine prinzipiell weniger wichtige Stellung und kann hier ausser Acht gelassen werden; ganz anders verhält sich der elfte *„De perimetri mutationibus salva figurae area“*[110]). Hier gelangt Meister zu einem Satze, dessen allgemeine Formulirung etwa so erfolgen könnte:

Gegeben sind in derselben Ebene zwei Polygone. Ist es möglich, in dieser Ebene zwei Punkte so zu bestimmen, dass die von ihnen bezüglich nach den Eckpunkten beider Polygone gezogenen Projektionsstrahlen eine zur Verbindungslinie jener Punkte parallele Gerade in den nämlichen Punkten treffen, so sind die beiden Polygone inhaltsgleich.

Der Fall, wo die beiden Punkte, aus welchen projizirt

108) *Meister*, S. 169. 109) *Maupertuis*, *Quadrature et rectification des figures formées par le roulement des polygones réguliers*, Mem. de l acad. de Paris, année 1727. 110) *Meister*, S. 175.

wird, in Einen unendlich entfernten zusammenrücken, wird gesondert betrachtet.

Den Schluss der ganzen Abhandlung[111]) endlich bildet eine allgemeine Auflösung des Problems, Vielecke irgend welcher Art in flächengleiche Dreiecke zu verwandeln. Suchen wir uns jetzt ein Gesammtbild von Meister's Leistungen zu verschaffen, so können wir sagen:

Die Stellung Meister's zu seinen Zeitgenossen ist eine durchaus eigenartige. Ihm verdankt der allgemeine Begriff des Vielecks, in dessen Constituirung nur ein einziger Mathematiker, A. Girard, ihm vorgearbeitet hatte, seine endgültige Präzisirung. Abgesehen von einzelnen neuen Theoremen knüpft sich an seinen Namen besonders der ausgedehnte Gebrauch phoronomischer Betrachtungen, die Unterscheidung der verschiedenen „Ufer" einer Geraden, die in der Analysis situs so wichtig werden sollte, und die Einführung des Begriffes positiver und negativer Flächentheile.

§. 14. Wir benützen die hier sich bietende Gelegenheit, gleich einiger Arbeiten Erwähnung zu thun, aus denen hervorgeht, dass ihre Verfasser auf dem von Meister gelegten Grunde fortbauten. Freilich haben dieselben es nicht eigentlich mit der Theorie der Sternvielecke zu thun; allein wir haben uns im Verlaufe unserer bisherigen Untersuchungen bereits zur Genüge überzeugt, dass wir unsere Aufgabe nur dann wirklich zu lösen im Stande sein werden, wenn wir alle geistigen Bestrebungen mit in unsern Bereich ziehen, welche mit der richtigen Auffassung des verallgemeinerten Vieleckbegriffes zu thun haben. So wird uns ein wahres Verständniss der Entstehungsgeschichte der sternförmigen Polyëder erst dadurch sich anbahnen, dass wir uns genau darüber Rechenschaft geben, wie man in den verschiedenen Zeiten, von der primitiven Auffassung der Griechen bis zu Poinsot, sich das eigentliche Wesen eines Polyëders zurechtlegte. Doch hiervon später.

Eine Reihe bemerkenswerther Fälle hat uns Baltzer[112]) namhaft gemacht; so hat sich der um eine rationelle Auffassung geometrischer Dinge hochverdiente L'Huilier[113]) anscheinend zuerst in die durch Meister vorgezeichnete Bahn

111) *Meister*, S. 176. 112) *Baltzer*, Die Elemente der Mathematik, 2. Band, Leipzig 1870. S. 68. 113) *L'Huilier*, *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata*, Varsoviae 1782. S. 23.

gefunden. Auf sphärische Figuren übertragen finden wir analoge Betrachtungen bei Lexell. Man hatte sich zu seiner Zeit daran gewöhnt, unter einem sphärischen Dreieck ganz ausschliesslich ein solches zu verstehen, dessen drei Seiten je kleiner als 90^0 waren, obschon bereits Girard bei seinem so höchst gelungenen Versuche, die Fläche eines solchen Dreiecks zu bestimmen, die Seiten über die ganze Kugelfläche verlängert hatte. Lexell hob die bisherige Beschränkung auf und kam so naturgemäss auch auf Figuren, deren Perimeter sich selbst schneidet. Eine solche Bemerkung lässt sich an Fig. 50. anknüpfen[114]). *„Si in superficie sphaerae tres sumantur puncta A, B, V, patet semper bina quaecunque eorum, duobus arcubus circulorum maximorum jungi posse, uno scilicet arcu semicirculo minore, altero tantundem majore existente; hincque si per triangulum sphaericum intelligatur figura, quae includitur tribus arcubus circulorum maximorum, patet jungendo tria puncta A, B, V omnino octo formari posse triangula sphaerica. Scilicet si bini arcus AB et $360^0 - AB$ indicentur per v, v', similiterque bini arcus AV, $360^0 - AV$ per a, a', per b, b' et BV, $360^0 - BV$ octo haec triangula orientur per combinationes diversas trium a vel a', b vel b'"*.

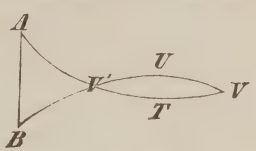


Fig. 50.

Unter diesen Dreiecken ist nun auch eines, dessen Seiten die in der Figur gezogenen Bogen *AV, VB, BA* sind, dessen Umfang sich also selbst durchsetzt; in richtigem Verständniss von Meister's Auffassung sagt Lexell: *„Quo quarto vero observare convenit, arcus AV, BV antequam ad A, B pervenerint, se in V' intersecare, ubi igitur area trianguli censeri debet aequalis differentiae inter segmentum sphaericum VUV'TV et triangulum AV'B"*. Auch bei anderen Gelegenheiten[115]) kommt Lexell auf solche Schlüsse zurück.

Diese Konzeption des allgemeinen Vielecks scheint auch Gauss bei der Aufstellung seiner bekannten allgemeinen Formel geleitet zu haben, welche aus den Eckpunktskoordinaten

$$x, y; x', y', x'', y'' \ldots x^{n-1}, y^{n-1}$$

die Fläche

114) *Lexell, Solutio problematis Geometrici ex doctrina sphaericorum,* Acta acad. scient. imper. Petrop. 1781, I. S. 124 ff. 115) *Id. Demonstratio nonnullorum theorematum ex doctrina sphaerica,* Ibid. 1782, I. S. 91.

$$F=\tfrac{1}{2}[x(y'-y^{n-1})+x'(y''-y)+x''(y'''-y')+\ldots+x^{n-1}(y-y^{n-2})]$$

bestimmen lehrt[116]). Gauss spricht wenigstens nicht von Ausnahmefällen, und die Formel gilt in der That für jedes willkürliche einfache oder sternförmige Polygon.

Völlig spontan scheint auch bei Möbius die Herausbildung des allgemeinen Begriffes, was man unter Vieleck und dessen Fläche zu verstehen habe, sich vollzogen zu haben; wenigstens bemerkt man bei ihm keine direkte Einwirkung Meister'scher Ideen. Sein Gedankengang kommt auf Folgendes hinaus.

Man hat[117]) fünf Punkte in der Ebene und zieht zwischen denselben alle nur möglichen Verbindungslinien. Kennt man dann die Flächeninhalte der fünf Dreiecke, welchen stets drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des Fünfecks als Ecken zukommen, so kann man den Flächeninhalt der ganzen Figur berechnen. Allein die hierzu dienliche Bestimmungsgleichung ist quadratisch, und es fragt sich nun, wie man den hierdurch signalisirten doppelten Werth geometrisch zu deuten habe. Dies erledigt sich einfach so, dass jener Wurzelwerth geometrisch konstruirt wird, und es ergeben sich so, dem doppelten Vorzeichen zufolge, im Allgemeinen zwei Fünfecke, deren jedes gleicherweise der Bedingung genügt. Hierbei kann es sich aber ereignen, dass das resultirende Fünfeck kein gewöhnliches ist, sondern dass sein Umfang Doppelpunkte aufweist, deren es bekanntlich 2, 3 und 5 geben kann. Möbius bildet diese Formen sämmtlich ab und definirt dann, dass das, was man im einfachsten Falle als Flächeninhalt des Fünfecks bezeichnet hatte, unter den nöthigen Kautelen seine Gültigkeit beibehält. Diese Kautelen bestehen darin, dass der Sinn einer Dreiecksfläche beachtet, d. h. den Dreiecksflächen ABC und CBA ein entgegengesetzter Sinn beigelegt werde, wie dies aus einer früheren Definition von Möbius[118]) hervorgeht.

Diese Betrachtungen werden dann auf ganz willkürliche Vielecke von sich selbst durchkreuzendem Perimeter ausgedehnt, und man kommt zu folgendem für den Flächeninhalt eines allgemeinen Sternvieleckes wichtigen Theorem[119]):

116) *Carnot*, Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie, deutsch v. Schumacher, 2. Theil, Altona 1810. S. 362. 117) *Möbius*, Der barycentrische Calcül, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827. S. 218. 118) *Ibid.* S. 21. 119) *Ibid.* S. 220.

Hat man ein ganz willkürlich geformtes ebenes Polygon $AB \ldots MN$ und nimmt in dessen Ebene einen beliebigen Punkt P an, der mit den einzelnen Eckpunkten durch Gerade verbunden ist, so ist die Summe

$$PAB + PBC + \ldots + PMN + PNA$$

von der Lage von P ganz unabhängig und repräsentirt den richtigen Ausdruck für den Flächeninhalt des Polygons.

Aehnliche Bemerkungen finden sich auch in Möbius' Statik, und noch am Abend seines Lebens hat der berühmte Mathematiker auf jene Prinzipien eine umfassende Theorie der ebenen Figuren gegründet, welche wir später im Zusammenhange zu besprechen haben werden. Die hier skizzirten, von allen früheren oder gleichzeitigen Leistungen unbeeinflussten Festsetzungen, welche für die Lehre von den Sternpolygonen grundlegend sind, hatten wir im Auge, als wir bei unserer früheren geschichtlichen Arbeit über diesen Gegenstand dem Verfasser des „*Aperçu historique*" die Nichtberücksichtigung der Verdienste des deutschen Geometers zum Vorwurfe machten[120]).

§. 15. War der vorige Paragraph hauptsächlich angelegt, das Terrain darzustellen, auf welchem sich die für die Lehre von den Sternfiguren so epochemachende Erfindung von Poinsot vollziehen sollte, so möge hier jetzt eine analage Charakterisirung derjenigen Bestrebungen folgen, welche Poinsot's Entdeckung vorbereiten half. Wir glauben uns keinem Einwurfe auszusetzen, wenn wir den doppelten Charakter von Poinsot's grosser Neuerung in dieser Weise feststellen, denn in der That wird uns aus dem Studium seiner Werke die Art und Weise deutlich werden, wie ihm die Erfindung neuer analytischer aber planimetrisch verwendbarer Lehrsätze schliesslich auch zur Entdeckung ganz neuer räumlicher Gebilde verhalf. Aber keine Umgestaltung vollzieht sich auf dem Boden der Wissenschaft isolirt; immer muss das Feld der Forschung bis zu einem gewissen Grade bearbeitet sein, und so wollen wir jetzt dazu übergehen, eine natürlich nur skizzenhaft gehaltene Uebersicht über die wichtigsten Fortschritte einzuschalten, welche sich im Gebiete der Polyëdrometrie bis zu Poinsot's Zeit namhaft machen lassen.

120) *Möbius*, Lehrbuch der Statik, 1. Theil, Leipzig 1837. S. 65 ff.

Schon im Jahre 1532 hatte der Sicilianer Maurolycus die freilich noch etwas schattenhafte Idee gefasst, dass durch die ganze Körperwelt ein grosses Gesetz sich hindurchziehen müsse, jenes Gesetz, welches wir jetzt mit dem Namen der Dualität bezeichnen, und hatte so, wie dies T. Müller zuerst wahrgenommen hat[121]), die Existenz polar zugeordneter Körper prinzipiell anerkannt*). Ohne von diesem Vorgänger Kenntniss zu haben, unterwarf der uns bereits bekannte Meister die Lehre von den dualen Beziehungen der Körper einer gründlichen Untersuchung, die sich würdig seinen Leistungen auf einem ähnlichen Gebiete der ebenen Geometrie zur Seite stellt. Seine Erklärung polar-zugeordneter oder, wie er sich ausdrückt, reziproker Körper ist diese[122]):

„*Corpora reciproca voco quorum utrumcunque tot habet angulos solidos, quot alterum latera; hinc et tot latera, quot alterum angulos solidos. Esto itaque, in corpore altero A, numerus laterum* $= m$, *index ordinis* $= n$, *numerus angulorum solidorum* $= n + 4$; *erit in altero corpore B, vi problematis, numerus angulorum solidorum* $V + 4 = m$; *a quo si auferatur quaternarius, residuum* $m - 4$ *erit index ordinis quaesitus* v".

Dann bedarf es allerdings noch eines Beweises, dass die Seitenzahl des zweiten Körpers B gleich $(n + 4)$ sein muss; dieser Beweis wird apagogisch geführt. So sind nach den von Meister[123]) selbst angeführten Beispielen, etwa Würfel und Oktaëder, Dodekaëder und Ikosaëder reziprok zugeordnete Körper, während der dreiseitigen Pyramide wieder eine solche entspricht. Ueber solche polare Gebilde folgt dann eine Reihe mit der bei Meister gewohnten Feinsinnigkeit geführter Untersuchungen, auf die weiter einzugehen uns hier nicht verstattet ist.

Gehörten die bisher besprochenen Gegenstände mehr in

*) Wir registriren die Fortschritte, welche die Stereometrie in der Erkenntniss jenes Fundamentalgesetzes nach und nach machte, auch deshalb sorgsamer, weil sich aus ihrer Darstellung vielleicht Einiges für die Genesis der Poinsot'schen Entdeckung folgern lassen wird.

121) *Müller*, Zur Geschichte des Dualismus in der Geometrie, Archiv d. Math. u. Phys., 35. Band. S. 1 ff. 122) *Meister*, *Commentatio de solidis geometricis pro cognoscenda eorum indole in certos ordines et versus disponendos*, Comment. Gotting. Tom. VII. S. 39. 123) *Ibid.* S. 40.

das Gebiet der Geometrie der Lage, so hatte auch manch anderes Gebiet im laufenden Jahrhundert bedeutende Bereicherungen erhalten. Der Begriff der Aehnlichkeit und Aehnlichgleichheit (Symmetrie oder Congruenz) war durch Robert Simson genau analysirt worden[124]); derselbe wies in den betreffenden Stellen Euklid's Irrthümer nach, die er verbesserte und an deren Stelle er korrekte Definitionen sich zu setzen bemühte. Für beide Arten geometrischer Forschung in diesem Bereiche, für die metrische sowohl wie für die projektivische, war die Erfindung jenes berühmten Theoremes von höchster Wichtigkeit, welches der üblichen obwohl historisch ungenauen Bezeichnungsweise zufolge Euler's Namen trägt und für die Lehre von den durch Ebenen begrenzten Körpern gewiss dieselbe Bedeutung beanspruchen kann, wie das Ohm'sche Gesetz für die Elektrizitätslehre.

Stillschweigend vielleicht schon von Archimedes seiner Klassifikation der halbregulären Körper zu Grunde gelegt, fand dies Gesetz zuerst bei Descartes den festen mathematischen Ausdruck[125]) — ein historisches Faktum, auf welches zuerst Baltzer[126]) die Aufmerksamkeit der Gelehrten gelenkt zu haben scheint. Cartesius scheint induktorisch auf dasselbe gekommen zu sein, indem er Betrachtungen über die Art und Weise anstellte, wie man aus der gegebenen Anzahl von Bestimmungsstücken eines Polyëders auf seine Natur, d. h. die Beschaffenheit seiner Körperwinkel schliessen könne. So mag er zuerst aus gegebenen Figuren sich Körper, wie den von 4 Sechsecken und 4 Dreiecken eingeschlossenen[127])*) zusammengestellt und an diesen Abzählungen vorgenommen haben. Jedenfalls steht fest, dass Euler ganz unabhängig hiervon den Satz

*) Die Konstruktion solcher Körper spielt auch eine Rolle in dem bekannten Streite[128]) zwischen Cardan und Tartaglia. Kannten vielleicht jene Männer schon das Euler'sche Theorem, welches so komplizirte Aufgaben fast unbedingt zu ihrer Lösung benöthigen?

124) *Euclid's Elements, ed. by R. Simson*, Glasgow 1735. S. 388 ff. 125) *Baltzer*, Elemente, S. 213. 126) *Id.* Zur Geschichte des Euler'schen Satzes von den Polyëdern, Berl. akad. Ber. 1861. S. 1046. 127) *Oeuvres inédites de Descartes par M. Le cte. Foucher de Careil*, II. partie, Paris 1860. S. 220. 128) *Egen*, Handbuch der allgemeinen Arithmetik, 2. Theil, Berlin 1849. S. 206.

aufgefunden und auch zuerst bewiesen hat[129]). Diesem ersten Beweise sind dann bis in die neueste Zeit noch sehr viele andere*) gefolgt. Freilich nahm man vorerst noch die Allgemeingültigkeit des Euler'schen Satzes an und beging dadurch Fehler, bis L'Huilier zuerst die geltenden Ausnahmefälle aufstellte[131]), und dann später Hessel[132]) die endgültige Scheidung aller Polyëder in Euler'sche und Nicht-Euler'sche vollzog. Bekanntlich ist es seitdem möglich geworden, dieser Definition eine bessere zu substituiren, indem die von Riemann[133]) für die Oberflächen aufgestellte und von Helmholtz auf Räume ausgedehnte[134]) Eintheilung nach dem „Zusammenhang" beide Gattungen in einfachster Weise unterscheidet.

Wir sind so bis zum Abschluss des Jahrhunderts gelangt und können damit die erste Hälfte unserer historischen Darstellung — wir könnten sie die unsystematische Periode nennen — als abgeschlossen betrachten. Mit dem ersten Jahre des neuen Säkulums tritt auch eine entschiedene Wendung in der Lehre von den ebenen und räumlichen Sternfiguren ein, der ganze Stoff gewinnt seine feste analytische wie geometrische Basis, und die Aufgabe des Geschichtschreibers erleichtert sich um ein Wesentliches. Deshalb und weil wir nun an eine Zeit herantreten, deren Beschreibung noch kaum der Geschichte anheimfällt, dürfen wir uns von jetzt ab um Vieles kürzer fassen, als es uns in unserer bisherigen Darstellung gestattet war.

§. 16. Verfolgt man Poinsot's Erfindung bis zu ihrem Ursprung, so erkennt man bald, dass sie aus zwei ganz ver-

*) Dem von Baltzer gelieferten Literaturnachweise (a. a. O.) möchten wir noch einen Beweis von Seidelin[130]) angereiht wissen, welcher mit Vortheil den Schluss von n auf $(n+1)$ anwendet.

129) *Euler*, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, Nov. Comm. Petrop. 1758. S. 156. 130) *Seidelin*, *Bevis for en Satning af Stereometrien*, Tychsen Tidsskrift for Mathematik, VI. S. 22. 131) *L'Huilier*, *Demonstrations diverses du théorème d'Euler sur les polièdres*, Gergonne, Annales de math. pures et appliqu. III. S. 178. 132) *Hessel*, Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von den Polyëdern, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., 8. Band. S. 13 ff. 133) *Riemann*, Lehrsätze aus der *Analysis situs* für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien, *Ibid.* 54. Band. S. 105. 134) *Helmholtz*, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen etc., *Ibid.* 55. Band. S. 26.

schiedenen Wurzeln hervorgeht. Wir haben oben (§. 9.) gesehen, wie Kepler die hier zu lösende Aufgabe bereits so weit gefördert hatte, dass die Identität der Anzahl verschiedener Diagonalen eines regelmässigen Vielecks mit der Anzahl der reellen Wurzeln der betreffenden Kreistheilungsgleichung ihm klar zum Bewusstsein gekommen war. Allein nicht jeder einzelnen unter diesen verschiedenen Diagonalen entspricht auch ein besonderes Sternvieleck; um vielmehr aus jener Gesammtsumme die Anzahl dieser letzteren abzuscheiden, bedarf es einer neuen Untersuchung, die im Wesentlichen zahlentheoretischen Charakters ist. Damit also Poinsot mit Einem Schlage seine grosse Neuerung ins Leben rufen konnte, war es nothwendig, dass er auch in dieser Hinsicht alle Vorarbeiten bereits fertig vorfand. Und in der That hatte ihm Euler bereits tüchtig den Weg geebnet, wie sich dies im Verlaufe unserer Darstellung ergeben wird. Vor Allem musste die Vorfrage erledigt sein: Wie viel ganze Zahlen giebt es kleiner als eine gegebene Zahl, die zu dieser letzteren sämmtlich relative Primzahlen sind. Die Antwort auf jene Frage hatte bereits Euler[135]) in richtiger Weise gegeben, und von seiner Auflösung konnte demnach Poinsot bereits Nutzen ziehen. Im gleichen Jahre, wo er seine Arbeit veröffentlichte, behandelte auch Gauss[136]) den Gegenstand in ungleich eleganterer Weise; doch kam dieser Beitrag wohl nicht mehr rechtzeitig zu Poinsot's Kenntniss.

Derselbe erklärt in seiner Einleitung sein Thema für einen Bestandtheil der „*Géométrie de situation*“[137]). Dieses Wort fasst er im Sinne d'Alembert's, erklärt ausdrücklich, dass Carnot etwas anderes darunter verstanden habe, und macht auch die Untersuchungen Euler's und Vandermonde's als hierher gehörig namhaft. Die Hereinziehung der ersteren kommt uns etwas seltsam vor, denn dieselbe zeigt sich bei genauem Studium überhaupt nicht als eine mathematische, sondern als

---

135) *Euler*, *Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur*, Nov. Comm. Petrop. T. VIII. S. 74. 136) *Gauss*, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae 1801. S. 30. 137) *Poinsot*, *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, Journ. de l'école polyt., Dixième cahier. S. 16.

eine rein empirische[138]). Das Wesen der Geometrie der Lage, wie wir sie jetzt verstehen, ist überhaupt ein ganz anderes, indem v. Staudt's Auffassung sich mehr derjenigen Carnot's, als der d'Alembert's nähert; eher dürfte das, was man jetzt *analysis situs* nennt, in Beziehung zu dem Forschungskreise Poinsot's stehen. Analysiren wir aber die einzelnen hier erwähnten Arbeiten eingehender, so möchte unser Endurtheil ungefähr dahin lauten, dass Euler's und Vandermonde's Betrachtungen über das Rösselsprungproblem in dem Fache unterzubringen seien, welches man nach dem Vorgang englischer Mathematiker jetzt gewöhnlich als die Lehre von der geometrischen Wahrscheinlichkeit zu bezeichnen pflegt, dass dagegen Poinsot's Forschungen als topologische im Sinne der Listing'schen Terminologie passiren müssen.

Den wissenschaftlichen Eingang der Abhandlung bilden Definitionen. Nachdem der Begriff des hohlen und erhabenen Winkels festgestellt ist, wird erklärt, was man unter einem convexen Polygon zu verstehen habe, dies Wort in einer universelleren als der gewöhnlichen Bedeutung gefasst. Da Poinsot's Definition sofort den allgemeinen Vielecksbegriff in sich aufnimmt, so möge sie in ihrer charakteristischen Form hier reproduzirt werden[139]):

„Si la droite qui reforme le polygone en se pliant successivement sur les côtés, ne fait qu'une fois le tour de l'espace angulaire, le contour ne peut être coupé par une droite en plus de deux points; mais si la droite mobile doit faire, avant d'achever la figure, deux ou un plus grand nombre de fois le tour entier de l'espace angulaire le contour peut être coupé par une droite en plus de deux points sans qu'il cesse d'être convexe, dans la rigoureuse acception de la convexité“.

Hierdurch ist die weitere Folgerung vorbereitet, dass im Allgemeinen zu jeder „Ordnungszahl“ (*ordre*) verschiedene „Arten“ (*espèces*) von Vielecken gehören; als erste Art gilt das gewöhnliche Vieleck im Sinne der Alten, alle übrigen Arten fallen unter den Begriff der Sternpolygone*).

*) Dieser Bezeichnungsweise haben auch deutsche Mathematiker, vor

138) *Euler*, *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse, sur la marche du cavalier sur l'échiquier*, Mém. de l'acad. de Berlin, 1759. S. 310 ff. 139) *Poinsot*, S. 20.

Wie viele aber? An diese Frage tritt Poinsot sofort heran, gestützt auf die oben signalisirten Daten der Zahlenlehre. Er denkt sich eine Anzahl von Punkten gleich jener Ordnungszahl äquidistant auf der Peripherie eines Kreises markirt und verbindet den (willkürlich herausgegriffenen) Punkt 1 mit Punkt h, diesen mit $(2h-1)$ u. s. f. Ist dann m die Ordnung des Vielecks, so erhellt zunächst Folgendes[140]):

Die Anzahl der der Ordnungszahl m entsprechenden Arten findet man, wenn man abzählt, wie oftmal jene Zahl h verschieden gewählt werden kann, ohne dass der resultirende Linienzug aufhört zum Punkte 1 zurückzuführen. So oft dies angeht, so oftmal erhält man ein geschlossenes Vieleck der Ordnungszahl m, dessen Winkelsumme den Werth

$$\pi(m-2h)$$

besitzt.

Es lässt sich aber für diese Anzahl der Arten auch ein sehr eleganter independenter Ausdruck gewinnen. Durch eine sehr einfache Betrachtung gelangt Poinsot zu dem Fundamentalsatz der Lehre von den Sternfiguren:

Ist

$$m = \alpha^{\nu}\beta^{\varrho}\gamma^{\varrho}\ldots,$$

so ist die Anzahl der von einander verschiedenen Vielecksarten

$$N = \frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\cdots$$

So giebt es denn also beim Fünfeck 2, beim Siebeneck 3, beim Elfeck 5 Arten; beim Achteck blos zwei, welche, wenn man bei unserer Eintheilung strikte verbleiben will, bezüglich als erste und dritte aufgeführt werden müssen. Beim Sechseck haben wir

$$N = \tfrac{6}{2}(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{2}) = 1,$$

also giebt es nur eine einzige Art. Poinsot bildet[141])*) aller-

Allem Wiener, sich angeschlossen, und so werden auch wir hier an derselben festhalten.

*) Poinsot kann streng genommen der Erste genannt werden, welcher die Scheidung der Vielecke in wirkliche und nur scheinbare Sternvielecke (in einander gelegte gewöhnliche) Vielecke mit der nöthigen Schärfe durchführte. Indess hatte, wie wir früher bemerkten[142]), Kepler bereits den alten Ballast des sternförmigen Sechsecks über Bord geworfen.

140) *Poinsot*, S. 22. 141) *Ibid.* Figurentafel. 142) *Günther-Sparagna*, S. 336.

dings auch das uns in früheren Darstellungen so häufig entgegengetretene irrthümliche Sternsechseck ab, fügt aber die charakteristischen Worte bei: „*Exagone de la 2ème espèce en apparence, mais ce n'est que l'Assemblage de deux triangles mis en Croix l'un sur l'autre*".

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass alles Bisherige auch vom willkürlichen Vieleck gilt, welches ja durch einfache Deformation aus dem regulären gebildet werden kann. Der Kreis diente lediglich zur bequemeren Fixirung der Vorstellungen.

Im zweiten Abschnitt seines Essai macht Poinsot eine Anwendung des bis dahin Vorgetragenen auf ein mechanisches Problem[143]). Wir wollen dasselbe hier nur kurz berühren, indem wir nur statt Poinsot selbst lieber O. Terquem (s. o. §. 9.) zum Führer wählen, der jene Darstellungsweise bedeutend vereinfacht hat. Wir müssen dabei bemerken, dass bei letzterem die Artenzahl immer um eine Einheit gegen Poinsot erniedrigt erscheint. Terquem also formulirt die Aufgabe so[144]):

„*Un fil formé passe à travers n anneaux, entre lesquels il peut glisser; les anneaux sont tirés par des forces égales divisant l'espace angulaire, en parties égales. Le fil, dans le cas de l'equilibre, formera un polygone régulier de n côtés de toute espèce: on demande la grandeur de la tension*".

Die Grösse der Spannung findet sich leicht, indem man jede Einzelkraft = 1 setzt und dieselbe nach den Seiten des Polygons in zwei Komponenten zerfällt. Dieselbe ist ihrem numerischen Werthe nach gleich

$$\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2n}(n-2p+2)},$$

und wird also für $p = 2$, d. h. für das gewöhnliche Vieleck, ein Grösstes.

Im Anschluss an diese Auffassung des Sternvielecks als Seilpolygon wird dann eine weitere Frage diskutirt, welche recht eigentlich topologischer Natur ist[145]). Abstrahirt man von der nicht gerade erforderlichen Einkleidung, so gewinnt man die wichtige Thatsache[146]): *Sämmtliche Kanten und Diago-*

143) *Poinsot*, S. 25 ff. 144) *Terquem*, S. 71. 145) *Poinsot*, S. 28. 146) *Terquem*, S. 73.

nalen eines Polyëders von ungerader Eckenzahl lassen sich in einem einzigen Zuge beschreiben; nicht aber gilt dies für eine gerade Eckenzahl. Der analoge Satz für (ebene oder windschiefe) Polygone ist natürlich nur ein Korollar hiezu.

Wie oft dies aber auf verschiedene Weise möglich sei, bleibt unerörtert. Terquem[147]) macht dazu die Bemerkung: *„La détermination du nombre des solutions possibles pour un nombre impair de points est un problème dont la solution est à désirer. Je l'ai proposé à plusieurs géomètres distingués, sans rien obtenir. Le jeu du domino présente une question de ce genre: de combien de manières peut-on placer sur une seule ligne tous les dominos, en observant la loi du jeu?“* Aehnliche Fragen sind in neuester Zeit von Reiss[148]) mit Erfolg behandelt worden, indem er die Dominosteine zu einer die Spielregeln einhaltenden kreisförmigen Reihe anordnet und für die Anzahl der alsdann vorhandenen „zirkularen Kombinationen“ eine independente Formel ausmittelt.

§. 17. Bis hierher reicht Poinsot's Erfindung; durch sie war es ihm möglich geworden, eine Menge bis dahin blos lose an einander gereihter Thatsachen zu einem organischen Ganzen zu verbinden. Indem er aber nun sich in den Raum erhob und alles, was er für zwei Dimensionen bewiesen hatte, auch auf drei auszudehnen versuchte, gelang ihm eine Entdeckung, welche noch jetzt als eine völlig eigenartige dasteht.

Poinsot bespricht zuerst die regelmässigen Körper der Alten[149]), indem er in edler Bescheidenheit die Gründe angiebt, welche dieselben wohl an Erfindung neuer analoger Körperformen verhindert hätten — im Grunde die nämlichen, welche eben überhaupt ein Heraustreten der griechischen Mathematiker aus den ihnen geläufig gewordenen Bahnen unmöglich machten. Er selbst aber hält es nur für nöthig, den für die Ebene bereits gewonnenen Begriff des „Konvexen“ auch für den Raum zu verwerthen, wozu dann natürlich auch eine entsprechende Fassung der Kunstwörter „*face*“ (Seitenfläche), „*arête*“ (Kante) und „*sommet*“ (Ecke) gehört. Unter ersterer hat man einfach die Gesammtheit aller in der nämlichen Begrenzungsebene ge-

147) *Terquem*, S. 74. 148) *Reiss, Evaluation du nombre des combinaisons desquelles les* 28 *dés d'un jeu du Domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu*, Annali di matematica pura ed applicata, continuazione Tomo V. S. 63 ff. S. 90 ff. 149) *Poinsot*, S. 34.

legenen Figuren zu verstehen; so wird es beispielsweise niemand einfallen, das gewöhnliche Dodekaëder von 60 Dreiecken, statt von 12 Fünfecken eingeschlossen anzusehen[150]). Und so liegt denn offenbar der allerdings an dieser Stelle noch nicht in Worte gefasste Schluss nahe: Warum sollten wir uns als Begrenzungsfigur nicht auch ein Sternpolygon denken können? Denken wir uns also den Begriff der Seitenfläche in der nöthigen Allgemeinheit, so wird uns auch die bezügliche Deutung von Kante und Ecke nicht schwer fallen. Nachdem diese einleitenden Begriffe klar gelegt und mit einer Erörterung verbunden sind[151]), in welcher Weise die dem Polyëder zugeordneten sphärischen Polygone von den gewöhnlichen abweichen werden, beginnt wiederum der rechnerische Theil der Studie. Man nehme ein ebenes reguläres Polygon von n Seiten und denke sich dasselbe auf die Kugelfläche projizirt, wo dann ein sphärisches ebenfalls reguläres und n seitiges Polygon entsteht; ist dann a der Werth eines der Winkel $\left(\frac{\pi}{2} = 1 \text{ gesetzt}\right)$, so findet sich nach Girard's Theorem der Flächeninhalt

$$F = an - 2n + 4.$$

Auf der Kugel mögen sich H solcher Polygone befinden, welche jedoch nicht einmal blos, sondern mehrmal die Sphäre bedecken; E möge diese Anzahl sein; dann gilt die Gleichung

$$H(an - 2n + 4) = 8E.$$

Um jeden Eckpunkt herum sollen q Winkel liegen, die e mal den Winkelraum von vier Rechten erfüllen, dann ist

$$a = \frac{4e}{q}.$$

Die Zahlen H und e haben ersichtlich auch eine direkte Beziehung zu dem Polyëder, welches in der angegebenen Weise der Kugel eingeschrieben ist; H ist nämlich die Anzahl der Seitenflächen, e die Art des Polyëders (diesen Begriff von der Ebene auf den Körper ausgedehnt). Durch Substitution resultirt die Schlussgleichung[152])

$$H\left(\frac{4en}{q} - 2n + 4\right) = 8E;$$

150) *Poinsot*, S. 35. 151) *Ibid.* S. 37. 152) *Ibid.* S. 37.

„*et cette équation aux cinq indéterminées, H, n, q, e, E, donne tous les polyèdres réguliers que l'on peut construire avec des polygones ordinaires*".

Setzt man $E = e = 1$, so hat diese Gleichung 5, mit Ausnahme von a, ganzzahlige Auflösungen, welche in der Existenz der fünf platonischen Körper ihr reelles Substrat finden. Ungleich schwieriger gestaltet sich selbstverständlich die Sache, wenn auch e und E in dem gegebenen Intervalle ganzer Zahlen zwischen

$$1 \text{ und } \frac{q-1}{2}$$

variiren dürfen. Poinsot verzweifelte auch an einer allgemeinen Auflösung, „*quant aux polyèdres*" — sagt er[153]) — „*d'espèces supérieures, quoiqu'un puisse également faire l'énumération de ceux qui sont possibles, leur existence demeure incertaine, et nous n'avons pu établir que dans un petit nombre de cas*". Allein glücklicherweise sind eben diese „sehr wenigen" Fälle die einzigen möglichen.

Poinsot, dem es ja, insofern er prinzipiell an eine Bestimmung der Gesammtanzahl denkbarer Lösungen nicht glaubte, nur auf Einzellösungen ankommen konnte, hilft sich dadurch, dass er nur zwei Lösungen analytisch, zwei andere geometrisch aufsucht. Zuerst findet er

$$n = 3, \quad q = 5, \quad e = 2, \quad H = 20, \quad E = 7,$$

alsdann

$$n = 5, \quad q = 5, \quad e = 2, \quad H = 12, \quad E = 3.$$

Durch diese Zahlen sind zwei wirkliche neue Polyëder, und zwar Sternpolyëder, gegeben, von Poinsot „*nouvel icosaèdre*" und „*nouveau dodécaèdre*" genannt. Nach Wiener's Terminologie haben wir hier das „sterneckige Zwanzigflach" und das „sterneckige Zwölfflach" vor uns.

Aus diesen beiden Polyëdern lassen sich jetzt unverzüglich zwei weitere ableiten*). Man verlängere bei dem zuletzt

*) Wir sind bei Darstellung der Entdeckungsgeschichte der zwei letzten Körper im Grunde ein wenig von unserer Vorlage abgewichen. Allein wir glauben fest, dass Poinsot, wenn er auch bei der schliess-

153) *Poinsot*, S. 39.

erhaltenen Körper von jeder Seitenfläche die Umfassungslinien, so entsteht ein neuer Körper begrenzt von 12 Sternfünfecken (der zweiten Art). Da die entsprechenden sphärischen Polygone viermal die umschriebene Kugel überdecken, so ist das neue körperliche Vieleck in Poinsot's Sinn ein Sterndodekaëder der vierten Art — wir nennen es das „zwanzigeckige Sternzwölfflach". Der letzte der 4 Körper könnte in ähnlicher Weise mit Hülfe des ersten oben angeführten gebildet werden; Poinsot aber zieht es vor, ihn durch Verlängerung der Kanten eines gewöhnlichen Dodekaëders bis zu ihrem Durchschnitt entstehen zu lassen, und gewinnt so an vierter Stelle das „zwölfeckige Sternzwölfflach" (Sterndodekaëder der zweiten Art).

Zum Schluss wird noch[154]) davon gehandelt, was für Körper man erhält, wenn man einerseits die Mittelpunkte der Seitenflächen, andererseits die der Kanten bei den verschiedenen (gewöhnlichen und sternförmigen) Polyëdern durch Gerade verbindet und durch diese sukzessive Ebenen legt. Es ergiebt sich, dass man auf diese Weise entweder wieder zu regulären oder zu den halbregulären Körpern des Archimedes kommt*).

Nachdem wir im Vorstehenden die grosse Entdeckung Poinsot's skizzirt haben, sei uns noch ein kurzer vergleichender Rückblick gestattet. Ein Individuum aus der Zahl der Sternpolyëder (das zweite in Poinsot's Reihenfolge) kommt, wie wir oben (§. 11.) nachgewiesen haben, bereits im 16. Jahrhundert vor, zwei andere (das dritte und vierte) nach dem nämlichen Paragraphen auch bei Kepler, und zwar hier an hervorragender Stelle. Hat nun Poinsot dieses Faktum gekannt? Fast möchte man es vermuthen, da er die „*Harmonice mundi*" gelegentlich[155]) zitirt. Terquem[156]) bemerkt richtig, dass dies Zitat allerdings nicht aus eigner Kenntniss stamme, sondern einem anderen Autor, Lidonne[157]), nachgeschrieben sei, deutet

lichen Redaktion seiner Studien die Sache umgestellt hat, doch in seinem ursprünglichen Gedankengang den hier angedeuteten Weg befolgte, d. h. er führte die neuen Körper auf bekannte zurück und sah erst nachträglich zu, welche charakteristische Zahlen ihnen zukamen.

*) Auf Poinsot's Schlussbetrachtung einzugehen, behalten wir uns für §. 22. vor.

154) *Poinsot*, S. 43 ff. 155) *Ibid.* S. 44. 156) *Terquem*, S. 311. 157) *Lidonne, Table de tous les diviseurs des nombres, calculés, depuis un jusqu'à cent deux mille, suivies d'une dissertation sur une question de*

aber an, dass es psychologisch nicht erklärbar sei, wie Poinsot sich mit einer solchen Anführung habe begnügen können, ohne der Sache auf den Grund zu gehen. „*Sachant qu'un géomètre, ayant nom Kepler, avait traité un sujet semblable, comment n'a-t-on pas la curiosité de consulter l'ouvrage.*"

Wäre es erwiesen, dass Poinsot durch Kepler die Kenntniss von der Existenz zweier Sternpolyëder erhalten habe, so läge es freilich nahe zu glauben, dass er sich in den Besitz der beiden anderen in einfacherer Weise gesetzt habe, als in der von ihm *a posteriori* angegebenen. Denn, wie man sich leicht überzeugt, stehen die zwei neuen Körper Poinsot's zu den älteren Kepler's in dem Verhältniss der Reziprozität (Polarität), und da jene Lehre, wie wir ausführten (§. 15.), damals schon hinlänglich kultivirt war, so hätte es einem Manne von Poinsot's Geist nicht schwer fallen können, die betreffende Umsetzung vorzunehmen. Andererseits trägt aber doch auch seine zahlentheoretische Entwickelung den charakteristischen Stempel origineller Einfachheit, und die ganze Darstellung lässt nicht wohl den Gedanken aufkommen, dass man es hier mit einer nicht ganz redlichen Machination zu thun habe. Deshalb glauben wir jene Hypothese, so viel Verlockendes sie auch unzweifelhaft an sich hat, abweisen zu müssen.

Erwähnt möge noch werden, dass, wie wir allerdings schon wissen, Poinsot in O. Terquem einen ausgezeichneten Kommentator gefunden hat; zu diesem Kommentar hat dann wieder Dienger eine deutsche Paraphrase geliefert[158]).

§. 18. Ein Punkt, und zwar ein Punkt von höchster Bedeutung, war von Poinsot nicht erledigt worden. Während bekanntlich die Konstruktion regelmässiger Polygone prinzipiell immer möglich ist, musste sich nothwendig die Frage erheben, ob ein Gleiches auch im Raume gelte? Wäre ersteres der Fall, so wäre jede weitere Untersuchung rein zahlentheoretischer Natur, im anderen Falle dagegen entstünde die weitere Frage: Wieviel regelmässige Sternpolyëder giebt es ausser den von Poinsot entdeckten? Dieser selbst neigte sich, wie wir fanden (§. 17.), des ersteren Meinung zu, und da er seine vier

---

stéréométrie, extraite de quelques auteurs du siècle dernier, Paris 1808.
158) *Dienger*, Ueber Sternpolygone und Sternpolyëder nach Poinsot, Archiv d. Math. u. Phys. 13. Theil, S. 434 ff.

neuen Formen nicht im Verlaufe einer streng denselben Weg beschreitenden Untersuchung, sondern mehr durch glückliche Vereinigung zweier ganz verschiedenen Untersuchungsmethoden gefunden hatte, so musste ihm auch jene näher liegen. Das Verdienst, dieselbe als unhaltbar dargethan zu haben, gebührt Cauchy.

Derselbe beginnt seine Arbeit mit der Bemerkung, dass man anders zu Werke gehen müsse, als dies Poinsot that, denn, sagt er[159]), *„il est vrai que la diversité des méthodes dont M. Poinsot s'est servi pour dériver les trois nouveaux dodécaèdres, et le nouvel icosaèdre du dodécaèdre et de l'icosaèdre ordinaire, laisse en doute la possibilité de resoudre la question précédente“*. Cauchy generalisirt also eine der beiden Methoden Poinsot's und zwar die geometrische, indem er an die Spitze seiner Abhandlung das Theorem stellt:

Man kann jedes reguläre Sternpolyëder dadurch erzeugen, dass man die Kanten resp. die Seitenflächen eines gewöhnlichen regelmässigen Polyëders verlängert.

Und an dasselbe schliesst sich sofort das weitere an[160]):

Die so konstruirten Sternpolyëder sind zugleich die einzigen, welche es überhaupt giebt.

Diesen Satz gilt es nun zu beweisen, und zwar giebt Cauchy einem indirekten Beweisverfahren den Vorzug. Seine Idee ist etwa folgende: Nicht aus einem jeden der gewöhnlichen regulären Körper lassen sich in der vorstehend angedeuteten Manier neue regelmässige Formen entwickeln, z. B. beim Tetraëder, Oktaëder oder Kubus ist eine solche Möglichkeit, wie die oberflächlichste Betrachtung lehrt, nicht vorhanden. Es existiren vielmehr — und dies ist eine Sache der reinen Beobachtung — nur vier Möglichkeiten, solche neue Körper zu erzeugen. Kehren wir aber jetzt die Sache um, so wird es darauf ankommen, Folgendes nachzuweisen:

Dasjenige Polyëder erster Art und mter Ordnung, aus welchem durch Verlängerung von Kanten resp. Seitenflächen ein reguläres Sternpolyëder der mten Ordnung hervorgegangen ist, muss selbst regulär gewesen sein.

---

159) *Cauchy*, *Recherches sur les polyèdres*, Journ. de l'école polyt., Seizième cahier. S. 69. 160) *Ibid.* S. 69.

Gilt dies als wahr, dann ist auch sofort einleuchtend, dass es wirklich nur vier solche Körper geben kann.

Den Beweis leistet Cauchy in ebenso einfacher als eleganter Weise[161]). Er ist erbracht, wenn zuerst die Gleichheit sämmtlicher Seitenflächen des inneren Polyëders — bei Cauchy unter dem Namen „*noyau*“ auftretend — dargethan ist und hierauf noch die Regelmässigkeit eines dieser begrenzenden Vielecke. Die erste Abtheilung wird erledigt, indem man sich ein dem gegebenen kongruentes Sternpolyëder konstruirt und beide Körper in allen möglichen Lagen zur Deckung gebracht denkt. Es ergiebt sich aber aus dieser Operation auch noch unmittelbar, dass jede Seitenfläche entweder ein gewöhnliches reguläres Polygon von der Ordnung n, oder aber ein halbreguläres Polygon von einer Ordnungszahl $\geq 2n$ sein muss — unter n die Anzahl der Seitenflächen des Sternpolyëders verstanden. Das letztere ist aber unmöglich, denn die Annahmen $n = 1$ und $n = 2$ sind unzulässig, die Annahme $n = 3$ hingegen widerstreitet dem Satze, dass aus dem Würfel ein Polyëder von höherer Art hervorgehen kann:

„*Il est donc prouvé maintenant, que dans un ordre quelconque on ne peut construire des polyèdres réguliers d'une espèce supérieure, qu' autant qu' ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers de même ordre et de première espèce qui lui servent de noyau; et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèces supérieures doivent avoir le même nombre de côtés que celles des polyèdres de première espèce*“[162]).

Den Schluss des ersten Theils der Abhandlung macht ein ausführliches Resumé der vorangegangenen Darlegungen aus und führt die nämlichen Schlüsse, von allem Nebensächlichen befreit, in umgekehrter Ordnung nochmals vor; den zweiten Theil bildet eine Erweiterung des Euler'schen Lehrsatzes[163]). Dem algebraischen Charakter, in welchem die Lehre von den Sternpolyëdern bis dahin erscheint, hat sich Cauchy's Darstellung offenbar gänzlich entfremdet, dafür aber hat sie an Anschaulichkeit bedeutend zugenommen.

Interessante literarhistorische Notizen über die verschiedenen geometrischen Anfangsstudien des berühmten Geometers, dessen Erstlingsleistung wir hier zu besprechen hatten, kann

161) *Cauchy*, S. 71. 162) *Ibid.* S. 72. 163) *Ibid.* S. 74 ff.

man in dem Kommentare nachsehen[164]), mit welchem Boncompagni die von Valson ausgearbeitete Biographie Cauchy's begleitete.

§. 19. Ein relativ langer Zeitraum liegt zwischen jener Epoche, der die fundamentalen Arbeiten Poinsot's und Cauchy's angehören, und dem Erscheinen der nächsten grösseren Publikation über einen verwandten Gegenstand. Nur einen Ausnahmefall vermögen wir zu konstatiren, die kurzen bereits früher (§. 15.) beregten Andeutungen von Möbius, welche indess damals nur einem Gelegenheitszwecke dienen sollten. Derjenige Gelehrte, der anscheinend spontan, jedenfalls ohne Rücksichtnahme auf frühere Forschungen, die Lehre von den Sternfiguren wieder in Fluss zu bringen suchte, war nicht speziell Mathematiker, und diesem Umstande ist es vielleicht zuzuschreiben, dass seine mathematischen Werke nicht den ihrem inneren Werthe entsprechenden Eingang in der Fachwelt fanden. Carl Christian Krause, von dem wir hier reden, zeigt sich uns als eine im grossartigsten Sinne des Wortes polyhistorische Gelehrtennatur, dessen philosophische Bestrebungen nicht nur in Deutschland, sondern vor Allem auch in den romanischen Nachbarstaaten tiefe Wurzeln schlugen, der sich aber auch als Mathematiker einen ehrenvollen Namen erworben hat*). Aber die etwas abstrakt-philosophischen Betrachtungen, mit welchen bei ihm die rein mathematische Spekulation allenthalben versetzt erscheint, waren damals, als sein Hauptwerk erschien, nicht geeignet, ihm Sympathien zu verschaffen, zumal auch Sprache und Darstellungsweise mehrfach aus dem gewohnten Gleise treten. Ueberdies war der Mathematiker jener Zeit zu vielfach mit dem Verarbeiten des immensen von Abel, Jacobi und den französischen Koryphäen gelieferten Stoffes beschäftigt, als dass er jenen Aus-

*) Bezüglich der mannigfachen neuen Ideen, mit welchen Krause die analytische Geometrie, speziell die Theorie der transszendenten Kurven, befruchtete, vergleiche man ein Schriftchen von Cantor[165]), welches an solche Vorstellungen anknüpft.

164) *Boncompagni*, *Intorno ad un' opera del Sig. C. A. Valson intitolata la vie et les travaux du baron Cauchy*, Bulletino Tomo II. S. 14 ff.
165) *Cantor*, Ueber ein weniger gebräuchliches Koordinaten-System, Frankfurt a. M. 1851.

läufern geometrischer Forschung hätte viel Beachtung zuwenden können, und so theilen Krause's Arbeiten mit jenen des ihm geistesverwandten Meister das Loos, von den noch grösseren Leistungen der Zeitgenossen gewissermassen absorbirt worden zu sein.

Krause giebt an[166]), dass er bereits im Jahre 1798 auf eine neue und selbstständige Theorie der geradlinigen Vielecke gekommen sei, dass er auch darüber eine ausführliche „*theoria polygonismorum*" verfasst, aber nicht zum Druck gebracht habe. „*In genuina mea polygonismorum rectilineorum tractatione etiam de asterismis agitur, de Pentalphate, heptalphatis, octalphatis,* $(2n)$ *— alphatis, et* $(2n \pm 1)$ *alphatis; de quibus etiam alio tempore et loco publice disserui.*" Wo aber, dies wird nicht gesagt, und wir haben auch keine weiteren Anhaltspunkte zur Beantwortung dieser Frage aufzufinden vermocht. Indess sind wir wohl zu der Annahme ermächtigt, dass Krause die Hauptresultate seiner desfallsigen Untersuchungen in sein posthumes Werk über die Kurvenlehre mit aufgenommen habe. Aber freilich beschränkt sich dieser Theil jenes Buches auf einige allgemeine Definitionen und Notizen, welche uns nicht hinlänglich in den eigentlichen Gehalt jener ausgedehnteren Forschung hineinsehen lassen.

Denken wir uns ein willkürliches Vieleck, dessen Seiten in einem bestimmten Sinne durchlaufen werden, dann werden auf jeder einzelnen Vielecksseite durch einen Eckpunkt zwei Theile abgeschieden; die eine (ins Unendliche sich erstreckende) Hälfte, der die Seite selbst angehört, werde als positive, die andere als negative Richtung genommen. Alsdann versteht Krause[167]) unter dem „Beugungswinkel" *(angulus flexus)* zweier Graden den Winkel, welchen bezüglich die beiden positiven oder die beiden negativen Richtungen mit einander einschliessen. Dieser Definition folgt dann die weitere des allgemeinen regulären Polygons in der Ebene[168]):

„*Si in aliquo polygonismo rectilineari n laterum omnia latera sint aequaliter longa atque eadem oppositivitate, hoc est aut omnes positivâ aut omnes negativâ longitudine, et si omnium angulorum*

166) *Karl Christian Friedrich Krause's* handschriftlicher Nachlass. Herausgegeben von Freunden und Schülern desselben, 2. Abtheilung, München 1835. S. 15. 167) *Ibid.* S. 15. 168) *Ibid.* S. 18.

flexùs inter se aequalium summa sit $= 360^0$ *aut* 2.360^0, *aut* 3.360^0 *aut* $z.360^0$; *latus ultimum, nempe n — tum revertetur angulo flexùs omnibus reliquis aequali in punctum initiale lateris primi. Et vocabitur ejusmodi polygonismus regularis seu polygonum regulare, atque si angulorum flexus summa sit* 2.360^0 *aut* 3.360^0, *aut generaliter* $(1 + z).\ 360^0$, *vocabitur n — alpha s. asterismus n — gonius, uti pentalpha, heptalpha, octalpha et quae sequuntur.*"

Diese Definition ist streng genommen ein Lehrsatz, und Krause erkennt dies auch an, indem er einen Beweis der ausgesprochenen Wahrheiten liefert. Zur Illustrirung dient ihm das reguläre Zehneck mit den beiden daraus derivirten Sternzehnecken. Hierauf gestattet sich der Verfasser noch eine nicht uninteressante polemische Bemerkung gegen die Utilitäts-Mathematiker, die es also auch zu seiner Zeit schon gegeben zu haben scheint, und ruft aus[169]): *„Forsitan non deerunt, qui generalem polygonismorum rectilineorum theoriam ideo parvi habeant, quia ejusdem utilitatem nullam cognoscant. At utilitas hujus theoriae eo major elucebit, quando perfectius eadem exculta erit*". Auch wird noch erwähnt, dass eine strenge Theorie der Sternpolygone die Kreislehre durchaus nicht zur nothwendigen Voraussetzung haben müsse.

Dies im Wesentlichen eine Uebersicht über das von Krause uns gebotene Material. So spärlich dasselbe auch ist, so gestattet es doch einen Gesammtschluss, der etwa so lauten müsste:

Aehnlich wie bei Meister erscheint bei Krause das Sternpolygon als Unterfall einer abstrakten Diskussion der einfachen räumlichen Gebilde. Im Gegensatz zu den mehr das Metrische berücksichtigenden Arbeiten Poinsot's werden hier ausschliesslich die Punkte hervorgehoben, welche in Beziehung zu einer sich anschliessenden phoronomischen Theorie der Gebilde einer Dimension stehen.

§. 20. Ein regeres wissenschaftliches Leben auf unserem Gebiete beginnt sich erst im Eingange der sechziger Jahre zu entfalten. Zuerst wäre zu erwähnen eine kleine Arbeit von E. Schröder, der sich auch, was hier gleich bemerkt sein möge, von allen späteren Schriftstellern allein mit Krause'schen Lehren vertraut zeigt. Der Grundgedanke, von welchem

169) *Krause*, S. 20.

er ausgeht, besteht darin, zu untersuchen, wie sich die Lehre von den regelmässigen Vielecken gestalten würde, wenn an Stelle der Ordnungszahl n ein Bruch

$$\frac{p}{q}$$

treten würde. Natürlich kann eine solche Verallgemeinerung nur mit Hülfe einer willkürlichen Festsetzung geleistet werden, welche aber — ganz wie bei den analogen Erweiterungen der Arithmetik — einem allgemeinen Gesetze*) unterworfen sein muss. Dies kann etwa in der Weise geschehen, dass zuerst eine willkürliche Anzahl von Sätzen, welche bis dahin ausschliesslich unter der Geltung eines ganzzahligen n Sinn hatten, auch für gebrochene n noch bestehen gelassen wird; hierauf fragt man sich, welche Auffassung diese Uebertragung rechtfertigt, und diese Auffassung wird dann dem erwähnten Gesetze genügen.

Diese allgemeine Regel befolgt auch Schröder. Er spricht sieben Theoreme der gewöhnlichen Geometrie verallgemeinert aus; diesen (analytischen) Formulirungen fehlt dann noch zur Zeit[171]) das reelle Substrat. Deshalb bemerkte auch der Verfasser[172]): „Die bisherigen Formeln haben wenig Interesse für uns, wenn es nicht gelingt, die $\frac{p}{q}$ Seite geometrisch zu interpretiren. Nun ist aber offenbar ein Polygon, welches $\frac{p}{q}$ Seiten oder Ecken hat, ein widersinniger Begriff. Fügt man aber q Polygone von $\frac{p}{q}$ Seiten und Ecken zusammen, dass die Bruchtheile der Seiten sich zu Ganzen ergänzen, so müssen wir eine Figur von p Seiten und Ecken erhalten, und es liegt nichts im Wege, dass wir diese Figur geometrisch darstellen".

Hiermit ist also Folgendes ausgesprochen:

*) Es ist dies bekanntlich das von Hankel[170]) zuerst formulirte, aber vorher schon unbewusst angewandte Gesetz der Permanenz formaler Beziehungen.

170) *Hankel*, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen, 1. Theil, Leipzig 1867. S. 10 ff. 171) *E. Schröder*, Ueber die Vielecke von gebrochener Seitenzahl, oder die Bedeutung der Sternpolygone in der Geometrie, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 7. Jahrg. S. 57. 172) *Ibid.* S. 59.

Ebenso, wie die allgemeine Potenzenlehre auf dem conventionellen Satze

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$$

beruht, kann man auch eine allgemeine Theorie der Polygone aus der gewöhnlichen dadurch herstellen, dass man ein Polygon der Ordnung p und der Art q als ein Polygon der Seitenzahl

$$\frac{p}{q}$$

betrachtet. Es ist dann ein solches Sternpolygon ein Komplex von q Polygonen gebrochener Seitenzahl $\frac{p}{q}$.

Mit Hülfe dieser Ausdrucksweise wird dann eine kurze, aber ziemlich umfassende Theorie der Sternpolygone gegeben, welche sich auch auf unregelmässige Vielecke erstreckt[173]). Ohne dass durch jene für die Auffindung neuer Wahrheiten Bedeutendes geleistet werden könnte, so eignet sie sich dagegen sehr gut zu konziser Zusammenfassung des Bekannten. Ueberdies hat sie vom formalen Standpunkte unleugbar eine prinzipielle Bedeutung, und man kann nur bedauern, von ihr nicht häufiger Gebrauch gemacht zu sehen.

§. 21. Ein Punkt der Lehre von den Sternfiguren war in den bisher besprochenen Bearbeitungen etwas zurückgeblieben, die Frage nach dem Flächeninhalte einer solchen Figur. Allerdings hatte schon Meister (s. o. §. 13.) die allgemeinen Direktiven auch für diese Materie aufgestellt, und auch Möbius (§ 14.) hatte den Begriff der Fläche richtig definirt, während dagegen Poinsot's Forschungen zu sehr auf regelmässige Vielecke gerichtet waren. So stand denn eine wichtige Frage noch offen:

Wie kann man für jedes willkürliche irreguläre Sternvieleck den Flächeninhalt durch ein einfaches Verfahren bestimmen?

Die erste genügende Antwort auf diese Frage ward von Jacobi gegeben. Der Zeitpunkt, zu welchem er sich mit derselben beschäftigte, ist uns nicht näher bekannt, und da erst nach seinem Tode die kurze Notiz, welche er darüber niedergeschrieben hatte, bekannt ward, so glaubten wir, dem chronologischen Gange folgend, derselben erst hier ihre Stelle anweisen zu sollen.

173) *E. Schröder*, S. 63.

Jacobi[174]) drückt die Regel, auf welche er gekommen war, in sehr aphoristischer Weise aus, so dass in der That die von Hermes[175]) beigefügte Paraphrase sehr am Platze ist. Wesentlich besteht sie in Folgendem:

In einem irregulären Sternpolygon, dessen Perimeter jedoch keine höheren als Doppelpunkte aufweisen darf, bezeichne man, von einer beliebigen Ecke ausgehend, jeden Durchschnittspunkt durch eine fortlaufende Zahl der natürlichen Zahlenreihe, so dass also, mit Ausnahme der Ecken, jeder Punkt zwei Zahlen beigeschrieben erhält. Dann nehme man eine willkürliche dieser Zahlen zum Anfang einer Reihe; das Fortschreitungsgesetz dieser Reihe ist dies, dass auf jede Zahl die der nächsthöheren beigeschriebene zu folgen hat. Lassen sich so m Zahlenreihen bilden, so ist der Inhalt des Vielecks gleich der Summe der m Theilvielecke, deren Ecken durch je eine Zahlenreihe repräsentirt sind. Kommt man bei jener Operation zu einer Ecke, so ist natürlich einfach die daselbst stehende Zahl zu setzen, und auf die höchste Zahl folgt wieder die erste.

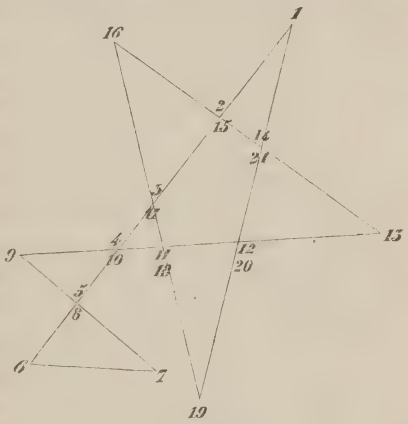


Fig. 51.

Wir wollen die etwas komplizirt erscheinende Vorschrift an einem Beispiele erläutern, indem wir die Fläche des in Fig. 51. dargestellten Siebenecks bestimmen, dessen Punkte in der angegebenen Weise bezeichnet sind. Dann bildet man, von 1 ausgehend, diese Zahlenreihe:

1, 15, 16, 3, 10, 18, 19, 12, 13, 21, 1, 15, 16 . . .

Man sieht, dass eine Wiederholung eintritt, und dass somit bei 21 die erste Zahlenreihe abgeschlossen ist. Von 2 geht dann die weitere aus:

---

174) *Jacobi*, Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 55. Band. S. 173. 175) *Hermes*, Erläuterung des vorstehenden Jacobi'schen Bruchstücks, ibid. S. 174.

2, 17, 11, 20, 14.

Die Zahl 3 würde ersichtlich nichts Neues liefern, da sie bereits in der ersten Zahlenfolge auftritt. Dagegen ergeben 4 und 5:

4, 8, 9.

5, 6, 7.

Da wir nun sämmtliche Zahlen untergebracht haben, so ist die Abzählung geschlossen; das obige m ist $= 4$, und wir finden den gesuchten Flächeninhalt

$F =$ Zehneck 1, 15, 16, 3, 10, 18, 19, 12, 13, 21
$+$ Fünfeck 2, 17, 11, 20, 14 $+$ Dreieck 4, 8, 9
$+$ Dreieck 5, 6, 7.

Es versteht sich, dass die einzelnen hier vorkommenden Flächentheile mit dem entsprechenden Zeichen nach der Meister-Möbius'schen Regel in Rechnung gebracht werden müssten. Sonst würde nach der von Baltzer[176]) in Aufnahme gebrachten Bezeichungsweise von Möbius den Bestandtheilen 1, 3, 4 der Koëffizient 1, dem Bestandtheil 2 der Koëffizient 2 zukommen.

Um die allgemeine Wahrheit unserer Regel einzusehen, bedarf es zweier Voraussetzungen. Einmal muss bewiesen sein, dass die nämliche Zahl nicht in mehrere Reihen zugleich eingehen kann — das folgt aber sofort aus der Bildungsweise derselben. Komplizirter dagegen ist die andere Vorfrage, und Jacobi selbst[177]) bemerkt: „Schwieriger ist es allgemein zu zeigen, dass in der auf die angegebene Weise gebildeten Zahlenreihe niemals zwei demselben Punkte zugehörige Zahlen vorkommen können".

Den hier angedeuteten Beweis hat Hermes in seinem schon genannten Kommentare nachgeliefert. Er ändert zu diesem Behuf Jacobi's Vorschrift in etwas um und giebt auch jeder Ecke zwei Zahlen, nämlich zwei aufeinanderfolgende, für die praktische Ausführung scheint aber die ursprüngliche Methode bequemer. Ist aber jener erste Satz bewiesen, so folgt leicht auch die Wahrheit des Schlusstheorems, wie dies Hermes an jenem Orte nachgewiesen hat.

So elegant auch Jacobi's Regel war, so fehlte ihr doch

176) *Baltzer*, Elemente, S. 68. 177) *Jacobi*, S. 174.

noch die nöthige Allgemeinheit, insofern mehrfache Punkte des umschliessenden Linienzuges nicht zugelassen waren. Hermes[178]) hat aber gezeigt, dass sie mit geringfügigen Modifikationen auch diesen allgemeinsten Fall umfasst. Zunächst markirt man wieder die einzelnen Schnittpunkte, wie oben, und es werden dann im Allgemeinen mehr als zwei Zahlen an ein und demselben Punkte stehen, wie sich dies in Fig. 52. zeigt. Dieses Neuneck hat einen drei-, einen vierfachen und vier doppelte Punkte. Wie man sich dann weiter zu verhalten hat, geht aus der Ueberlegung hervor, dass durch einen sehr einfachen Transformationsprozess jeder vielfache Punkt in eine Anzahl von Doppelpunkten gewissermassen aufgelöst werden kann. Dann aber gilt offenbar Folgendes:

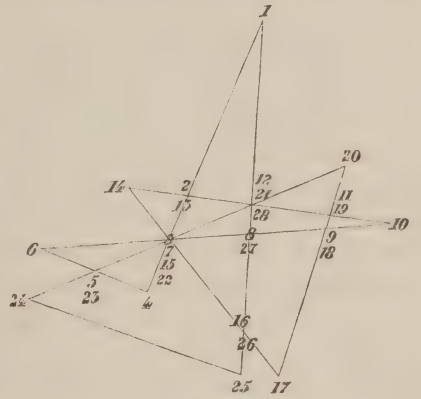


Fig. 52.

Man konstruirt sich zu dem gegebenen Polygon ein zweites, welches ihm in allen Stücken gleicht, nur mögen darin die vielfachen Punkte entsprechend aufgelöst sein. Die dadurch neu entstandenen Punkte bezeichne man durch die dazugehörige Zahl des ursprünglichen vielfachen Punktes, und zwar hänge man Indices zur Unterscheidung ihnen an. Dann behandle man das deformirte Polygon nach der Jacobi'schen Regel und setze zum Schluss all die Theildreiecke), in deren Eckzahlen Indices auftreten, gleich Null. Die mit Indices versehenen Zahlen werden der natürlichen Zahlenreihe angehörig gedacht, so dass etwa*

$$12 < 12_1 < 12_2 < 13$$

wäre.

*) Von Theildreiecken kann hier mit allem Fuge die Rede sein, denn es sind ja jene Einzelvielecke, auf welche Jacobi's Regel führt, gewöhnliche Vielecke im Sinne der Alten, so dass man durch eine Diagonale stets ein Dreieck abschneiden kann.

178) *Hermes*, Ausdehnung der Jacobi'schen Regel zur Bestimmung des Inhaltes der Sternpolygone für den Fall vielfacher Punkte, Journ. f. d. Mathem. 65. Band. S. 177 ff.

Die hier vorgeführte Formulirung weicht allerdings ein wenig von derjenigen von Hermes ab, indem dieser Mathematiker darauf verzichtet zu haben scheint, seiner Regel eine solche abgekürzte Fassung zu geben. Auf die zu beobachtenden Vorsichtsmassregeln beim Gebrauche derselben kann hier selbstverständlich nicht eingegangen werden.

§. 22. Die letzten Paragraphen hatten sich ausschliesslich mit den Sternpolygonen zu beschäftigen. In der That hatte man dem stereometrischen Analogon dieser Figuren in den letzten Jahren keine weitere Theilnahme gewidmet; man glaubte sich bei den Resultaten Poinsot's beruhigen zu können. Vermochte man aber auch in dieser Lehre nicht unmittelbar weitere Fortschritte zu machen, so konnte doch gleichwohl in Einzelheiten blos zur Vereinfachung und Vervollkommnung der Poinsot'schen Darstellung sehr viel geleistet werden. Den ersten Schritt hierzu that Bertrand, er substituirte dem Beweise, welchen Poinsot (s. o. §. 17.) für seinen Fundamentalsatz gegeben hatte, der aber[179]) schwierig und eigentlich nur am Modell nachweisbar sei, einen anderen einfacheren. Sein Beweisgang beruht auf folgender Grundanschauung.

Aus dem Euler'schen Satz ergiebt sich leicht die Unmöglichkeit, ein konvexes Polyëder zu finden, dessen sämmtliche Ecken von mehr als fünf Seitenflächen gebildet würden. Hierauf gestützt kann man den Satz beweisen:

Ein regelmässiges Polyëder, welches auch immer seine Art sei, kann doch stets mit einem regelmässigen Polyëder erster Art so in Verbindung gebracht werden, dass die Ecken beider Körper zusammenfallen[180]).

Denn zuerst konstruire man irgend ein konvexes Polyëder, welches mit dem Sternpolyëder die sämmtlichen Ecken gemein hat*). Soweit gingen wir der Hauptsache nach mit Poinsot zusammen; um aber weiter darzuthun, dass jenes Hülfspolyëder

*) Der Unterschied zwischen Bertrand's und Poinsot's Hülfs-Körper ist ein rein formaler; denn prinzipiell ist es das nämliche, ob man das durch die Ecken bestimmte Polyëder oder das ihm ähnliche und ähnlich liegende, den sogenannten „Kern" des Sternpolyëders, wählt. Dagegen ist die erstere Anschauung offenbar näherliegend, als die Poinsot's.

179) *Bertrand, Note sur la théorie des polyèdres réguliers,* Compt. rend. de l'acad. de sciences, Tome 47. S. 79. 180) *Ibid.* S. 80.

nothwendig selbst regulär sein müsse, müssen wir anders verfahren wie er; Poinsot betrachtet die Kanten und Seitenflächen, Bertrand die Ecken. Nunmehr verbinde man eine Anzahl von Ecken des Polyëders höherer Art durch Gerade, so wird eine Figur entstehen, zu welcher sich auf der Oberfläche des konvexen Polyëders eine kongruente angeben lassen wird; und da das erstere Polyëder regelmässig war, so müssen beide Figuren koinzidiren, wie man auch einen Winkel des einen auf einen des anderen Vielecks legt. Da aber in jeder Ecke des konvexen Polyëders wenigstens drei Seitenflächen sich durchsetzen, so kann jene Superposition der beiden Vielecke auch zum mindesten auf dreierlei Arten geschehen. Die körperlichen Winkel des Hülfspolyëders sind sonach sämmtlich kongruent, und, mögen die Ecken nun auch drei-, vier- oder fünfseitig sein — dies sind dem Hülfssatze zufolge die einzig denkbaren Möglichkeiten —, jedenfalls müssen sie, um in der angegebenen Weise mit sich selbst zur Deckung gebracht werden zu können, auch gleiche ebene Winkel besitzen. Ein Polyëder jedoch, das, nach Voraussetzung, ausschliesslich gleiche Kanten, nach dem zuletzt gezogenen Schlusse also ausschliesslich kongruente Seitenflächen und dazu kongruente Ecken hat, ist eben ein regelmässiges.

Hieraus folgt dann aber auch bei Bertrand die weitere Thatsache, dass es nur vier regelmässige Sternpolyëder geben könne, ganz entsprechend wie bei Cauchy. Als bemerkenswerth entnehmen wir Bertrand's Abhandlung noch die Notiz, dass zwar Poinsot selbst seine Idee in Form von Modellen realisirt habe, dass aber dieselben nicht mehr vorhanden seien. Hingegen beabsichtige ein Herr Gourjon solche Modelle im Grossen für den öffentlichen Gebrauch herzustellen. Die hierauf bezüglichen Veröffentlichung Gourjon's, welche Bertrand verspricht, scheint unterblieben zu sein.

Zu der Arbeit von Bertrand tritt, ziemlich um die nämliche Zeit, eine dem gleichen Gegenstande gewidmete von Cayley[181]). Derselbe beschäftigt sich zunächst damit, alle charakteristischen Bestimmungsstücke sowohl der gewöhnlichen als der sternförmigen regulären Polyëder tabellarisch zusammen-

181) *Cayley, On Poinsot's four new Regular Solids*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine Vol. XVII. S. 123 ff.

zustellen[182]). Die durch ihn in England eingeführte Terminologie ist folgende:

Great stellated dodecahedron — Zwanzigeckiges Sternzwölfflach.
Small stellated dodecahedron — Zwölfeckiges Sternzwölfflach.
Great icosahedron — Sterneckiges Zwanzigflach.
Great dodecahedron — Sterneckiges Zwölfflach.

Bei seinem Schema fasst Cayley den Begriff des Sternvielecks in einer von der gewöhnlichen abweichenden Weise; hierauf haben wir noch später zurückzukommen. Zum Schluss knüpft sich dann noch eine kurze Betrachtung an über die Erweiterung, welche Poinsot dem Euler'schen Theorem gegegeben hatte.

Dieselbe findet sich in der *„Addition à l'article des Polyèdres"*[183]), welche dem Hauptmémoire beigegeben ist. Es wird hier zunächst darauf hingewiesen, dass jenes Theorem nicht nur für konvexe Körper gelte, sondern auch für gewisse Polyëder mit einspringenden Ecken. Giebt es im Innern eines solchen Körpers einen Punkt, um den sich eine Kugel beschreiben lässt, die den Körper ganz in sich schliesst, so kann man aus dem Zentrum die einzelnen Seitenflächen auf die Kugel projiziren. Je nachdem sich alsdann solche Projektionen theilweise überlagern oder nicht, ist der Euler'sche Satz ungültig oder gültig.

Für die vier Sternpolyëder lässt sich nun ein Analogon dieses Lehrsatzes finden; es ist nämlich, die früheren Bezeichnungen beibehalten, dagegen unter S, H und A bezüglich die Anzahl der Ecken, Seitenflächen und Kanten verstanden[184]), nach Poinsot,

$$eS + H = A + 2E.$$

Hiergegen erhebt Cayley Einrede. Er führt zwei neue Begriffe vermittelst nachstehender Definitionen ein[185]):

„e′ viz. the angles which the sides of a face subtend at the centre of the face make together e′ times four right angles;

D, viz. the faces make together D times the spherical surface, the area of a stellated face being rekoned as the sum of the triangles, having their vertices at the centre of the face and standing on the sides,"

182) *Cayley*, S. 126. 183) *Poinsot*, S. 46 ff. 184) *Ibid.* S. 48.
185) *Cayley*, S. 126.

und beschränkt dann den Gültigkeitsbereich der Poinsot'schen Formel auf jene Sternpolyëder, welche $e' = 1$ liefern, d. h. auf das sterneckige Zwanzig- und Zwölfflach. Alle vier, ja auch die fünf alten Körper umfasst dagegen die neue Relation

$$eS + e'H = A + 2D,$$

deren Sinn jetzt vollständig zu Tage liegt.

§. 23. Indem wir in den letzten Abschnitten die Lehre von den Stern-Gebilden einerseits ihrem planimetrischen, andererseits ihrem stereometrischen Theile nach gesondert verfolgten, gelangten wir beidemale zum Beginn des vorigen Jahrzehnts. Wir konnten ein sichtbares Anwachsen des wissenschaftliches Materials und achtungswerthe Bestrebungen, dasselbe nach allen Seiten hin zu durchforschen, konstatiren, allein noch fehlte es an einer universellen Bearbeitung des Gesammtstoffes, und so lange eine solche nicht existirte, war auch nur wenig Hoffnung vorhanden, die neuen Wahrheiten in die Lehrbücher und damit auch in die allgemeine Kenntniss übergehen zu sehen. Der nothwendig gewordene Fortschritt vollzog sich endlich im Jahre 1864 durch das Erscheinen des kleinen aber trefflichen Werkes von Wiener[186]), welches in kompendiöser Form alle früheren Leistungen in sich aufnahm und auch der unnatürlichen Trennung zwischen Ebene und Raum ein Ende machte.

Es kann selbstverständlich nicht in unserem Plane liegen, Exzerpte aus einem Buche hier mitzutheilen, welches in der Hand jedes Mathematikers sich befinden sollte. Wenn wir gleichwohl auf ein gedrängtes Resumé uns hier einlassen, so thun wir dies deshalb, weil Wiener's Schrift sich nicht auf die konzise Wiedergabe von bereits Bekanntem beschränkt, sondern zahlreiche eigene Gedanken mit einmischt. Auf die Hervorhebung dieser letzteren müssen wir uns einschränken.

Um die „Art" eines gegebenen Vielecks zu bestimmen, denkt sich Wiener[187]) zu ihm ein zweites als Hülfsfigur konstruirt, indem er von einem beliebigen Punkte aus Parallellinien zu sämmtlichen Seiten des ersten zieht, natürlich auch

186) *Wiener*, Ueber Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864. 187) *Ibid.* S. 2.

in der Richtung, in welcher dieselben durchlaufen werden. Von diesem Auxiliar-Polygon gilt aber der Satz:

„*In jeder zweiten Figur zu einem Vielecke wird jede von der Mitte aus einseitig gezogene Gerade G a-mal mehr in dem Sinne überschritten, in welchem a Umdrehungen stattfinden, als in dem entgegengesetzten.*“ *Diess a giebt die Art des ersten Vielecks an.*

In Verfolgung dieser Idee lässt sich dann auch noch eine zweite Regel aufstellen, welche die Konstruktion der zweiten Figur entbehrlich macht. Man kann nämlich, wenn man eine willkürliche Richtung als „abwärtsgehende“ Grundrichtung festhält, eine Unterscheidung der vorhandenen Eckpunkte in rechts und links liegende treffen und dann sagen[188]):

Die Art a eines Vielecks ist gleich dem Ueberschuss der Anzahl der äussersten Eckpunkte links mit ausspringendem Winkel über die Anzahl der äussersten Eckpunkte rechts mit einspringendem Winkel.

Besondere Aufmerksamkeit hat Wiener der Fixirung solcher fundamentaler Begriffe, wie Diagonale, Doppelpunkt etc. gewidmet. Das Wesen der Doppelpunkte drückt sich besonders deutlich in folgenden beiden Sätzen aus:

Zerlegt man ein Vieleck der Art a in zwei Vielecke der Arten a_1 und a_2 durch Einführung eines Doppelpunktes, so ist, wenn nur der Sinn des Durchlaufens sich nicht ändert, $a = a_1 + a_2$[189]).

Ein Vieleck ohne Doppelpunkte ist von der ersten Art[190]).

Als Kriterium dafür, wie hoch die Art eines vorliegenden Vielecks zum mindesten sein müsse, kann mit Nutzen einer dieser beiden Sätze verwandt werden[191]):

Zu einem Vielecke der zweiten Art kann stets eine Gerade gefunden werden, welche es in wenigstens 4 Punkten schneidet, und ebenso existirt für jedes Vieleck von einer Art > 2 *eine Gerade, die mindestens 6 Punkte mit seinem Umfang gemein hat.*

Neu ist auch der Begriff der „Wendeseite“ eines Vielecks, an deren einem Ende der Vieleckswinkel kleiner, an deren anderem er grösser als zwei Rechte ist. Die mögliche Anzahl solcher Seiten in einem Vieleck muss gerade sein[191]).

Der Flächeninhalt eines willkürlichen Vielecks wird im Anschluss an Cayley (s. den vorigen Paragraph), aber auch in Uebereinstimmung mit Möbius (s. §. 14.) folgendermassen definirt[192]):

188) *Wiener*, S. 3. 189) *Ibid.* S. 4. 190) *Ibid.* S. 7. 191) *Ibid.* S. 10. 192) *Ibid.* S. 12.

Wählt man in der Ebene eines Polygons einen festen Punkt und lässt von demselben eine Gerade ausgehen, welche als Fahrstrahl den Perimeter des Polygons umfährt, so ist die Fläche F die algebraische Summe der durch den Radiusvector überstrichenen Flächentheile. Je nachdem die Bewegung in einem oder dem anderen Sinne vor sich geht, bringt man jene Flächentheile mit verschiedenem Vorzeichen in Rechnung.

An diese Definition schliesst sich die ausführliche Behandlung der Sternpolygone an, wesentlich in Poinsot's Sinne gehalten. Dies gilt auch von der nun folgenden[193]) Theorie der Vielflache, nur dass immer auf Bertrand's und Cayley's Verbesserungen, deren wir vorhin gedachten, gebührend Rücksicht genommen wird. Einen hohen Vorzug besitzt schliesslich die Wiener'sche Monographie darin, dass wir hier zum erstenmale sowohl die Netze als auch perspektivisch ausgeführte Zeichnungen der vier neuen Sternpolyëder erhalten und uns so ein klares Bild von der Eigenthümlichkeit dieser Gebilde verschaffen können.

§. 24. Wir stellen in diesem Paragraph mit kurzen Worten die neuesten Erweiterungen zusammen, deren die Lehre von den Sternpolyëdern theilhaftig wurde. Zunächst muss nachdrücklich die Thatsache hervorgehoben werden, dass in Wiener's Schrift die Grundzüge der allgemeinen Theorie der Polyëder niedergelegt sind, während man bis dahin ausschliesslich die regulären Polyëder ins Auge gefasst hatte. Unabhängig davon ist übrigens die bahnbrechende Bearbeitung der Polyëdrometrie an sich, welche Möbius bald nach Wiener als Schlussstein seiner grossartigen Studien über irreguläre räumliche Gebilde veröffentlichte. Wir möchten auf diesen Punkt mit besonderer Schärfe hinweisen, indem Möbius, abweichend von anderen Mathematikern, und hierin besonders mit den Bestrebungen von Meister zusammentreffend, solche allgemeinen Gesetze der räumlichen Gebilde zum Vorwurf seiner Untersuchungen zu machen liebt, für welche nicht auf die Beihülfe der Rechnung rekurrirt werden kann. Dass Möbius bereits lange Zeit vor der hier in Rede stehenden besonders richtige Urtheile über den Flächeninhalt ebener Figuren verbreitete, haben wir schon oben (§. 14.) in Erfahrung

193) *Wiener*, S. 16 ff.

gebracht, aber auch in anderen Arbeiten[194]) finden sich verwandte und einleitende Ideen.

In die zahllosen Einzelheiten der Möbius'schen Arbeit hier einzugehen, würde sich nicht rechtfertigen; wir begnügen uns vielmehr mit Hervorhebung einiger Hauptpunkte. Bei der Inhaltsbestimmung des allgemeinen ebenen Vielecks[195]) legt Möbius, indem er im Allgemeinen die Meister'sche Methode wiedergiebt, besonderen Nachdruck auf die Koëffizienten, welche jeder einzelnen Zelle zugehören. Behält man die ebenfalls von Meister eingeführte Schattirung der beiden Seiten einer Umfangslinie bei, so kann man die Hauptresultate, zu welchen Möbius[196]) gelangt, in folgender übersichtlicher Form aussprechen:

Ist von einer Flächenzelle überwiegend das äussere, bezüglich innere Ufer schattirt, so erhält dieselbe das positive, resp. negative Zeichen. Eine Zelle, deren Perimeter beides zu gleichen Theilen vereinigt, muss folgerichtig gleich Null gesetzt werden, haben dagegen n positive oder negative Zellen ein und dasselbe Flächenstück gemeinsam, so erhält dasselbe bezüglich den Koëffizienten $\pm n$.

Untersuchen wir so das Achtek $ABFGKLNP$ (Fig. 53.), so haben wir sieben Flächenzellen zu betrachten. Aus unserer Regel folgt, wann jede Zelle, deren Umgrenzung ausschliesslich die eine oder andere Schattirung aufweist, mehrfach genommen werden muss, und so bekommen wir denn, wenn die äussere Schattirung dem positiven Zeichen entspricht, nachstehendes Schema:

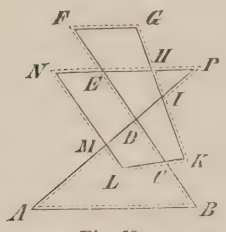


Fig. 53.

$\varphi_1 =$ Fünfeck $ABCLM$; Vorzeichen negativ; Koëffizient -1.
$\varphi_2 =$ Viereck $CDML$; Koëffizient 0.
$\varphi_3 =$ Viereck $CDIK$; Vorzeichen positiv; Koëffizient $+1$.
$\varphi_4 =$ Dreieck IPH; Vorzeichen positiv; Koëffizient $+1$.
$\varphi_5 =$ Viereck $HGFE$; Vorzeichen positiv; Koëffizient $+1$.
$\varphi_6 =$ Viereck $EDMN$; Vorzeichen positiv; Koëffizient $+1$.
$\varphi_7 =$ Viereck $DIHE$; Vorzeichen positiv; Koëffizient $+2$.

194) *Möbius*, Theorie der elementaren Verwandtschaft, Ber. über die Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 15. Band. S. 42 ff. 195) *Id.*, Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyëders, ibid. 17. Band. S. 42 ff. 196) *Ibid.* S. 48.

Sonach ist der Flächeninhalt unseres Vielecks

$$F = 2\varphi_7 + \varphi_6 + \varphi_5 + \varphi_4 + \varphi_3 - \varphi_1.$$

Diese Bestimmungsweise soll nun auch auf Vielflache ausgedehnt werden, oder es soll, besser gesagt, auch der körperliche Inhalt eines Polyëders in der Weise als Summe einer Anzahl von Pyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze dargestellt werden, wie diess in der Ebene geschah und zu der soeben erläuterten Regel führte. Jedoch lässt sich diese Verallgemeinerung nicht schlechthin für alle Polyëder durchführen, sondern nur für diejenigen, welche dem von Möbius aufgestellten „Gesetze der Kanten" unterliegen. Dieses selbst aber ist folgendes[197]):

„Den Perimetern der ein Polyëder umgrenzenden Flächen können solche Sinne beigelegt werden, dass für jede Kante des Polyëders die zwei Richtungen, welche derselben, als der gewöhnlichen Kante zweier Polyëderflächen, in Folge der Sinne dieser zwei Flächen zukommen, einander entgegengesetzt sind".

Diesem Gesetze unterliegen sowohl die konvexen, als auch die sternförmigen Polyëder, ausgeschlossen sind[198]) nur diejenigen, „von deren Flächen eine oder etliche von mehr als einem Perimeter begrenzt sind, sowie alle diejenigen Polyëder, welche eine oder mehrere innere Höhlungen haben".

Mit Hinsicht auf sein Kantengesetz definirt dann Möbius[199]):

Der Inhalt eines dieses Gesetz befriedigenden Polyëders ist die Summe von Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche, sonst aber willkürlich gelegene Spitze und die jenem Gesetze gemäss ausgedrückten Flächen des Polyëders zu Grundflächen haben.

Hiermit ist für den Kubikinhalt eines Sternpolyëders eine anschauliche Vorstellung gewonnen. Was sonst für die Lehre von den unregelmässigen Polyëdern aus Möbius' Arbeit zu entnehmen wäre, erfordert eine gesonderte Darstellung und kann von uns nicht weiter verfolgt werden; ein Gleiches gilt von den durch hohe Abstraktion ausgezeichneten schönen Untersuchungen von Becker und Jordan, und natürlich in noch höherem Grade von den auf ein noch allgemeineres Ziel gerichteten Studien Listing's, so grossen Nutzen auch sicher noch die Polyëdrometrie aus ihnen ziehen wird. Eine be-

197) *Möbius*, S. 33. 198) *Ibid.* S. 33. 199) *Ibid.* S. 53.

sondere Gattung irregulärer Polyëder ist neuerlich mehrfach Gegenstand der Betrachtungen geworden; hiervon am Schlusse dieser Abhandlung.

Was die regulären Sternpolyëder anbelangt, so liegt es in der Natur der Sache begründet, dass hier bedeutende Fortschritte nicht gemacht werden konnten, dass man vielmehr vor Allem darauf bedacht sein musste, das bereits Vorhandene zum Gemeingut Aller zu machen. Diesem Bestreben verdanken wir eine kleine Schrift von Steinhauser[200]), welche, theoretische Betrachtungen bei Seite lassend, ausschliesslich die Konstruktion von Modellen der 4 Poinsot'schen Körper lehren will. Für einen dieser Körper, für das zwölfeckige Sternzwölfflach, hat auch Schönemann[201]) eine direkte geometrische Verzeichnung angegeben, welche zwar zunächst der Theorie genügen, dann aber auch praktisch verwerthbar sein soll*).

§. 25. Während wir im vorigen Paragraphen ein Schlussresumé alles dessen zu geben versuchten, was für die Lehre von den Sternpolyëdern gethan ward, möge nunmehr eine gleiche Uebersicht für die Sternpolygone folgen. Indem wir uns zuerst auf deutsche Arbeiten beschränken, wollen wir mit wenigen Worten der Untersuchungen gedenken, welche auf die Bestimmung der Winkelsumme eines allgemeinen Vielecks, oder mit anderen Worten, eines irregulären Sternpolygons, Bezug haben.

Die betreffende Untersuchung ward angeregt durch Druckenmüller[202]), fortgesetzt durch Heinen[203]), welcher im Wesentlichen die ihm anscheinend unbekannt gebliebenen

*) Es möge auch noch bemerkt werden, dass Wiener in der bereits oben (§. 11.) angezogenen Abhandlung die Reziprozität der Polyëder genauer studirt und den Beweis geführt hat, dass das zu einem regulären Polyëder reziproke wieder denselben Charakter haben müsse — eine Thatsache, von welcher wir bereits bei einer früheren Gelegenheit (s. o. §. 17.) Gebrauch zu machen hatten.

200) *Steinhauser,* Die Netze der Poinsot'schen Körper zum Behufe der Darstellung ihrer Modelle, Graz 1871. 201) *Schönemann,* Ueber die Konstruktion und Darstellung des Ikosaëders und Sternen-Dodekaëders, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18. Band. S. 389 ff. 202) *Druckenmüller,* Museum des Rheinisch-Westphälischen Schulmänner-Vereines, Bd. III. S. 405 ff. 203) *Heinen,* Ueber die Summe der Winkel im Vielecke, Archiv d. Math. u. Phys. 29. Band. S. 474 ff.

Resultate Krause's (s. o. §. 19.) wieder gewann. In der Hauptsache schloss dann hier, wie in anderen Fragen, die Schrift von Wiener[204]) den Gegenstand ab, jedoch nicht so vollständig, dass nicht den ausführlichen Neubearbeituugen von Unferdinger[205]) und Steinhauser[206]) manche Nachlese verblieben wäre. Insbesondere gelingt es dem letztgenannten Geometer, die Hauptformel Wiener's nicht unwesentlich zu vereinfachen[207]).

Ausländische Mathematiker scheinen sich mit der Lehre von den Sternvielecken weit weniger abgegeben zu haben; wir sind nur zwei hierhergehörige Arbeiten namhaft zu machen in der Lage — eine englische und eine italienische. Die erstere — von Muir in Glasgow herrührend[208]) — stellt einige hübsche neue Theoreme auf, indem sie sich mit der Diskussion nachstehender Aufgabe beschäftigt:

In den Kreis vom Halbmesser 1 sind alle regulären Polygone einer gewissen Ordnungszahl N eingezeichnet. Multiplicirt man die verschiedenen Seiten und bezeichnet das Produkt durch

$$\Pi_N,$$

so soll für diese Grösse, je nach dem verschiedenen Charakter der Zahl N, ein anderer einfacher Werth gefunden werden.

Ist z. B. die Seitenzahl die Potenz einer Primzahl, etwa $= p^m$, so lässt sich[209]) zeigen, dass

$$\Pi_{p^m} = \sqrt{p}$$

ist, und ähnlich in anderen Fällen.

Die andere oben genannte Abhandlung trägt einen universelleren Charakter; wir müssen uns jedoch, da uns ein direkter Einblick in dieselbe nicht verstattet ist, lediglich auf die Analyse derselben beziehen, welche von Caselli[210]) einem Briefe an den Abbé Moigno einverleibt worden ist; der

204) *Wiener*, S. 14. 205) *Unferdinger*, Die allgemeine Formel für die Summe der Winkel eines Polygons, Sitzungsber. d. math.-naturw. Klasse d. kais. Akad. d. Wissensch., 57. Band. S. 627 ff. 206) *Steinhauser*, Ueber die Ermittelung der Winkelsumme ebener Polygone, Archiv d. Math. u. Phys. 52. Band. S. 294 ff. 207) *Ibid.* S. 305. 208) *Muir*, *A property of convex and stellate regular polygons of the same number of sides inscribed in a Circle*, Messenger of Mathematics, 1873. S. 47 ff. 209) *Ibid.* S. 48. 210) *Caselli*, *Considérations sur les polygones*, Les Mondes, Tome 29. S. 259.

eigentliche Verfasser heisst Pagni. Das leitende Motiv dieses Gelehrten wird mit folgenden Worten charakterisirt:

„Le beau traité de géométrie, publié en 1866 à Paris par MM. les professeurs Bouché et de Camberousse, a donné lieu à la publication de ce mémoire sur une intéressante question géométrique qui n'avait pas encore traité, du moins aussi nettement. — En déterminant l'espèce d'un polyèdre formé par des polygones étoilées, faut-il avoir égard au périmètre ou au plan. — Voilà la question étudiée par M. Pagni, et à laquelle il rattache aisément la suivante: — En déterminant l'aire d'un polygone étoilé, faut-il avoir égard à tout son périmètre, ou seulement son périmètre extérieur".

Die hier aufgeworfenen Fragen sind, wie man sieht, weder neu noch unbeantwortet, und es muss also Pagni's Darstellung besonders in methodischer Hinsicht Neues bringen. In der That giebt er an, sie sei streng synthetisch, im Gegensatz zu den analytischen Verfahrungsweisen anderer Mathematiker. Da aber unter diesen auch Möbius aufgeführt wird, so dürfte die ganze Darlegung zu einigen Zweifeln berechtigen; denn wie man eine Materie noch reiner geometrisch behandeln will, als es der grosse Leipziger Synthetiker that, möchte wohl schwer abzusehen sein.

In der Stereometrie scheint Pagni die Herstellung einer Reihe halbregulärer Sternpolyëder gelungen zu sein[211]), deren Aussehen als höchst eigenthümlich beschrieben wird.*)

§. 26. Wir könnten hier füglich abbrechen, denn selbst die strengste Rigorosität kann uns nicht eine Darstellung von wissenschaftlichen Ereignissen zur Pflicht machen, welche bis in unsere unmittelbare Gegenwart hereinreichen, und für welche wir einen geschichtlichen Massstab unmöglich gewonnen haben können. Wenn wir gleichwohl diess Prinzip nicht streng beobachten, so geschieht es einzig und allein, um einen würdigen Abschluss herbeizuführen. Denn ein solcher ergiebt sich doch

*) In die Lehrbücher hat die exakte Behandlung der allgemeinen Vielecks-Theorie bisher nur spärlich Eingang gefunden. Als besonders rühmliche Ausnahmen zitiren wir die schon mehrmals erwähnten „Elemente" von Baltzer, sowie auch die Darstellung des Gegenstandes[212]) bei Wolf.

211) *Caselli*, S. 260. 212) *Wolf*, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, 1. Band, Zürich 1869. S. 120 ff.

sicher am besten dann, wenn es gelingt, eine freudige Perspektive in die nächste Zukunft zu eröffnen, und eine solche scheint in der That in den Bestrebungen angebahnt zu werden, auf deren Signalisirung es uns hier allein ankommt.

Wir erwähnten bereits (§. 24.), dass man sich in letzter Zeit mehrfach mit einer gewissen Spezialität irregulärer Polyëder zu beschäftigen begonnen habe. Es sind diess die sogenannten „gleicheckigen" Polyëder. Auf diese Gebilde hat anscheinend zuerst Hessel aufmerksam gemacht[213]), er bildete diejenigen Körper, deren Seitenflächen gleicheckige Polygone sind. Da dann, wie man sich leicht überzeugt, ein Zentrum, d. h. ein von sämmtlichen Eckpunkten gleichweit entfernter Punkt existirt, so kann man die nach den Ecken gehenden Radien ziehen und sie in gleichen Distanzen mit senkrechten Ebenen durchschneiden. Dadurch entsteht dann ein reziprokes, nämlich das „gleichflächige" Polyëder. An diese Klassifikation Hessel's knüpfte nun ganz neuerlich Hess an, indem er die verschiedenen Varietäten dieser halbregelmässigen Körper wirklich zu diskutiren sucht[214]). Hierbei stellte sich jedoch für ihn die Nothwendigkeit heraus, zuerst eine eingehendere Theorie der gleicheckigen Sternpolygone zu besitzen. Diese ward also vorausgeschickt, und mit ihrer Hülfe gelang ihm dann der Beweis des Satzes:

Die Cayley-Wiener'sche Erweiterung des Euler'schen Lehrsatzes begreift alle gleicheckigen Polyëder in sich,

und hiermit war dann auch zugleich die Möglichkeit gegeben, einzelne Individuen aus jenem Gattungsbegriff herauszuheben und gesondert zu beschreiben.

Seine vorbereitenden Untersuchungen über die gleicheckigen Polygone hat der Verfasser zum Gegenstande einer selbstständigen Schrift gemacht, welche zwei Jahre später erschienen ist[215]). Es kann hier nicht die Rede davon sein, ein der neuesten Zeit angehörendes Werk rezensirend zu besprechen; wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass darin sehr ausführliche Studien über jene Klasse von sternförmigen Polygonen

213) *Hessel*, Uebersicht der gleicheckigen Polyëder und Hinweisung auf die Beziehungen dieser Körper zu den gleichflächigen Polyëdern, Marburg 1871. 214) *Hess*, Ueber die möglichen Arten und Varietäten einiger archimedischer Körper, Marburg 1872. 215) *Id.*, Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone, Marburg 1874.

mitgetheilt sind. Besonderes Interesse scheint uns die Art und Weise zu erwecken geeignet, wie Hess die gleicheckigen Polygone durch „Abstumpfung" der Ecken eines gewöhnlichen regulären Vielecks herstellt[216]).

Auf diesem Wege dürfte ein tiefer Einblick in das Wesen der ebenen sowohl wie räumlichen Sterngebilde sich gewinnen lassen, und es ist nur zu wünschen, dass der genannte Mathematiker rüstig auf der durch ihn eröffneten Bahn fortschreite.

Wir sind mit unserer vergleichenden Uebersicht bis zur Gegenwart gelangt und schliessen damit die Darstellung einer Disziplin, deren Entwickelungsgang vor anderen berufen scheint, die innige Relation, welche zwischen den einzelnen Sparten der Wissenschaft besteht, im hellsten Licht hervortreten zu lassen.

Noten.

I. Zu §. 7. In Bezug auf die Lebensumstände des polnischen Mathematikers Broscius war man bisher einzig und allein auf die in Kästner's „Geschichte der Mathematik" mitgetheilten Notizen angewiesen. Durch die Güte des Herrn M. Curtze in Thorn sind uns, hauptsächlich der „*Historja Literatury Polskicy*" von Wiszniewski entnommen, einige ausführlichere Nachweisungen über diesen bedeutenden Mann zu Theil geworden, die wir mit den Kästner'schen hier zu einem Gesammtbilde vereinigen wollen.

Johann Brocki, latinisirt Broscius, Curzeloviensis*), war in der zweiten Hälfte des sechszehnten Jahrhunderts, wahrscheinlich 1581, geboren. Wie Kästner[217]) mittheilt, muss er im Jahre 1620 in Italien gelebt haben. Eine untere Grenze für seine Studienzeit kann wohl dadurch fixirt werden, dass sein Name in den ältesten von Zeissberg[218]) edirten Studentenverzeichnissen der Krakauer Hochschule nicht vorkommt. Berichtet ein von Curtze angezogenes Manuskript der Krakauer Bibliothek die Wahrheit, so starb er 1652, denn es heisst dort: „*M. Joann. Broscius S. F. D. et Professor, Canonicus Cracoviensis, Praepositus Medzirecensis, Provisor Vladislav. Collegii obiit A. D. MDCLII. Aetatis suae 71*". Das Verzeichniss seiner schriftstellerischen Arbeiten ist von Curtze mit bekannter Akribie zusammengestellt, wir lassen dasselbe, seines allgemeinen Interesses halber, sammt den beigefügten Anmerkungen *in extenso* folgen.

*) Die sich hier und da findende polnische Lesart des Namens, Broszek, ist entschieden unberechtigt.

216) *Hess*, Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone, Marburg 1874. S. 720 ff. 217) *Kästner*, Gesch. d. Math., 3 Band. S. 204. 218) *Zeissberg*, Das älteste Matrikelbuch der Universität Krakau, Innsbruck 1872.

1) Geodaesia distantiarum sine instrumento, et Polybii locus obscurior geometrice explicatus. A. M. Johanne Broscio Curzeloviensi. Cracoviae in Offic. Andreae Petrichovii. Anno Domini 1610. 4°. 7 Blätter mit Figuren im Text. (In Krakau befindlich.)

2) Problema Geometricum in quo ex Geometriae fundamentis vera et propria causa redditur quare apes Hexagona figura favos construant. Editum a M. Joanne Broscio Curzel. Cracoviae, Andreas Petrichowski 1611. 4°. 7 Blätter mit Figuren im Text. (In der Ossolmski'schen Bibliothek zu Lemberg.)

3) Epistolae ad naturam ordinatarum figurarum plenius intelligendam pertinentes. Cracoviae, Petricovius 1615. 8°. 8 Blätter. (Briefe, gewechselt zwischen Adrianus Romanus und Broscius, in der Krakauer Bibliothek.)

4) Dissertatio V. (Utrum) Rebus publicis plus Astronomi quam Geometrae prosint. 1616.

5) Epistola dedicatoria ex Judicio Astrologico Alberti Coprini Buccoviensis desumpta. 16 Blätter. 4°. (In Krakau befindlich.)

6) Johannes Broscius Curzel. Ordinarius Astrol. Lectori S: „Habes Lector Ellipsium Lunae Tychonicis numeris designatum" . . . 1616. (In Krakau.)

7) Johannes Broscius . . . Lectori S: „Habes Lector Eclipsium Lunae Tychonicis numeris designatum" . . . Anno MDCXIX. (In Krakau.)

8) Quaestio de dierum inaequalitate a Magistro Joanne Broscio Curzel. Ordin. Acad. Cracov. Astrologo, publice ad disputandum proposita Anno MDCXIX. Cracoviae Petricovius. 4°. 6 Blätter. (In Krakau.)

9) Dissertatio de Cometa Astrophili. Scripta a Johanne Broscio Curzel. . . . Ex permissu Mag. Dni Rectoris. Cracoviae Petricovius 1619. 8°. 18 Blätter. (Krakau.) Enthält interessante Beiträge zur Kenntniss des wissenschaftlichen Entwickelungsganges ihres Verfassers.

10) Arithmetica integrorum edita a M. Joanne Broscio Curzeloviensi, Ordin. Acad. Cracov. Astrologo. Cracoviae 1620. 8°. 252 Seiten.

11) Tabula laterum et quadraticum poligonorum e Nepero. Cracoviae 1627. 1 Bogen. (Krakau.)

12) Johannis Broscii de numeris perfectis disceptatio. Qua ostenditur a decem millibus ad centiescentena millia, nullum esse perfectum numerum, atque ideo ab unitate usque ad centiescentena millia quattuor tantum perfectos numerari. Cracoviae, Wusiński 1637. 4°. 4 Blätter.

13) Dasselbe Buch. Amsterdam, Blaeu. CIↃIↃCXXXVIII. 4°. 2 Bogen. (Lemberg.)

14) Apologia piérusza Kalendarza Rzymskiego powszechnego za synodalym rozkazaniem Taśnic Wielmazniego T. M. X. Andrezejco Gembickiego. Naprsana przz X. Tana Broscyusa etc. Krakau 1641. Piotrsko. 4°. (Gothisch.) 12 Blätter. (Bibliothek des Fürsten Czartoryski zu Paris.)

15) Apologia cohora Kalendarz a Rzymskiego Powszechnego etc. . . . 1641. 4°. 2 Bogen. In Warschau gedruckt.

16) Peripateticus Cracoviensis a Joanne Broscio Curzelovienzi productus. Cum Super. Consensu. Cracoviae, F. Caesarius. 8. 20 Blätter. (1647.)

17) Apologia pro Aristotile et Euclide contra Petrum Ramum et alios.

Additae sunt duae disceptationes de numeris perfectis. Authore Joanne Broscio S. S. Th. Doct. et in Alma Universitate Collegii majoris Professore, Canonico Cracoviensi, Miedzisciensi et Stassoviensi Praeposito. Dantisci, G. Förster, MDCLII. 4°. 174 Seiten. (Das oben analysirte Werk.)

Soweit Herrn Curtze's Notizen. Mögen dieselben einen Mathematiker, der zu jenen Schriften gelangen kann, zu einer eingehenden Untersuchung anregen. Insbesondere für einen polnischen Gelehrten wäre es ungleich indizirter, die hohen Verdienste dieses unzweifelhaft seiner Nationalität angehörigen Mannes für den Nationalruhm auszubeuten, als einem Nachbarvolke einen Mann, der wie Copernicus in jedem Zuge den Deutschen bethätigte, abnergeln zu wollen.

II. Zu §. 11. Es ist in diesem Paragraphen nachgewiesen worden, dass Wenzel Jamitzer der Erste ein reguläres Sternvielflach wahrgenommen und gezeichnet hat, ohne indess natürlich den charakteristischen Unterschied zwischen dieser und anderen von ihm abgebildeten halbregulären Formen zu bemerken. So bildet u. a. auch Pacioli in seinem bekannten mit schönen Zeichnungen ausgestatteten Werke über den goldenen Schnitt[219]) einen Körper ab, welcher eine entfernte Aehnlichkeit mit dem zwanzigeckigen Sternzwölfflach verräth. Ja wir dürfen uns sogar nicht darüber wundern, dass überhaupt solche sporadische Entdeckungen gelangen, sondern dass sie nicht noch häufiger vorkamen, denn es scheint ganz unzweifelhaft, dass in praktischen Fällen solche Körper wirklich konstruirt wurden. Die morgensternartigen Aufsätze, welche man statt der Windfahnen oder dergl. an Giebeln und Dächern in oberdeutschen Städten noch jetzt häufig angebracht sieht, sind, wie eine genaue Untersuchung lehrt, oft genau nach dem Muster des soeben genannten Sternpolyëders gebildet, und in einer nach alten Vorbildern restaurirten Mosaikplatte der Markuskirche zu Venedig wird jeder Kundige nicht ohne Staunen eine ebenso schön als richtig ausgeführte perspektivische Darstellung des regelmässigen Sterndodekaëders erkennen.

III. Zu §. 12. Da es im Texte vor Allem auf Hervorhebung solcher Thatsachen ankam, die für die fortschreitende Entwickelung der Wissenschaft wirklich von Bedeutung sind, so konnten einige Kleinigkeiten dort unbesprochen bleiben, welche der Vollständigkeit halber nachgetragen werden müssen. So bedienten sich, wie Kästner[220]) anführt, die Ingenieure einfacher Methoden, um den Flächeninhalt von Sternvielecken (beide Worte natürlich im älteren und nicht in unserem jetzigen Sinne genommen) auszurechnen und Anwendungen auf die bereits an den Vor-Vauban'schen Systemen immer häufiger auftretenden Sternschanzen zu machen. Ein anderes analoges Beispiel zitirt der nämliche Autor aus der „*Gromatica*“[221]) von Lauremberg, wo die Grösse einer imaginären lydischen Stadt Asteris berechnet wird, welche in Sternform angelegt gewesen sein soll. Kästner selbst[222]) beschäftigt sich ganz ausführlich mit den Sternpolygonen und lehrt trigonometrische Rechnungen für die-

219) *Kästner*, 1. Band. S. 65 ff. 220) *Kästner*, Geom. Abhandl. 1. Sammlung. S. 345. 221) *Gromaticae libri tres, conscripti a Joanne Laurenbergio*, Hafniae 1649. 222) *Kästner*, S. 326 ff.

selben ausführen. Freilich hat er sich, wie schon aus früheren Zitaten hervorgeht (s. §. 4.), nicht bis zur richtigen allgemeinen Auffassung des Vielecksbegriffes emporgeschwungen, aber eine Ahnung des wahren Sachverhältnisses spricht sich doch an der Stelle aus[223]), wo er den aus Diagonalen gebildeten Stern von dem „allgemeineren" unterscheidet, der durch Verlängerung zweier nicht unmittelbar zusammenstossenden Seiten eines konvexen Polygons entsteht. Uebrigens zeichnet sich Kästner's Versuch durch einen grossen Reichthum an literarischen Notizen aus, welche wir sämmtlich passenden Ortes verwendet haben.

IV. Zu §. 14. Die mystische Bedeutung der Sternfiguren war vor der aufklärenden Tendenz des achtzehnten Jahrhunderts verblichen, und selbst da, wo noch Anklänge daran sich finden, tritt doch zugleich ein Bestreben hervor, Beziehungen zu den herrschenden Nützlichkeitsideen aufzufinden. Charakteristisch hierfür ist ein Beispiel aus einer der in jener Zeit so sehr beliebten „natürlichen Magien". Es heisst dort[224]):

„Beschreibet auf einen Pappendeckel, der 8 bis 9 Zoll im Quadrat hat, einen Zirkel, und in denselben noch einen kleinen, so dass zwischen beiden eine egale Bahn $^3/_4$ Zoll breit verbleibe. Diese konzentrische Zirkelbahn wird in 12 gleiche Theile durch die Buchstaben $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n$ abgetheilt, und aus diesen Theilungspunkten im inneren Zirkel von $a - f$, $f - m$, $m - d$, $d - i$, $i - b$, $h - g$, $g - n$, $n - e$, $e - l$, $l - c$ Linien gezogen, welche zusammen einen Stern ausmachen werden". Sehr klar ist, wie man sieht, diese Beschreibung nicht, indess hat das ganze Sternvieleck auch nur eine ganz sekundäre Bedeutung, sondern dasselbe wird nur zu einem arithmetischen Kunststück benützt. Demselben lässt sich, wie nachher Vieth[225]) gezeigt hat, eine ganz elegante Fassung ertheilen, und man erhält dann die folgende Aufgabe:

„*Eine Menge arithmetischer Progressionalzahlen so in dem Umfang eines Kreises herumzustellen, dass die Summe eines jeden Paares benachbarter Glieder gleich sei der Summe des Paares der gegenüberstehenden*".

Ueber dieses Problem, welches ersichtlich den magischen Quadraten nahe verwandt ist, hat dann Vieth (a. a. O.) eine Reihe ganz beachtenswerther Untersuchungen angestellt.

V. Zu §. 25. Einen hübschen Exkurs in die Lehre von den Sternpolygonen hat unlängst Reusch gemacht. Derselbe beschäftigt sich mit den bekannten eleganten Summenformeln, welche sich für die endlichen Reihen*)

---

*) Es könnte aus Reusch' Worten sich der irrthümliche Glaube entnehmen lassen, als ob Koller zuerst auf jene Formeln gekommen sei. In Wirklichkeit kommen dieselben bereits in Lagrange's Untersuchung

---

223) *Kästner*, S. 339. 224) *Wiegleb*, Unterricht in der natürlichen Magie, 1. Band, Berlin und Stettin 1789. S. 344. 225) *Vieth*, Vermischte Aufsätze für Liebhaber mathematischer Wissenschaften, Berlin 1792. S. 143.

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} x + h + \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} x + 2h + \cdots + \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} x + (q-1)\,h$$

aufstellen lassen, und leitet dieselben zunächst durch eine höchst elegante mechanische Betrachtung ab[228]). Dann aber handelt es sich um Bestimmung folgender Summen:

$$\Sigma \sin(p + rmz) = A,\quad \Sigma \cos(p + rmz) = B,\quad \Sigma\,[\sin(p + rmz)]^2 = C,$$
$$\Sigma\,[\cos(p + rmz)]^2 = D,$$

deren Werthe von Koller[229]) mit Hülfe jener früheren Relationen ermittelt wurden. Reusch zeigt zunächst, von statischen zu dynamischen Ueberlegungen fortschreitend, dass, wenn $r = 1$, $n > 2$,

$$A = B = 0,\quad C = \frac{n}{2} = D$$

sein muss. Wird r immer grösser, so muss nachgesehen werden, „wie sich die den Winkeln

$$p,\ p + r\,\frac{2\pi}{n},\ p + 2r\,\frac{2\pi}{n} \cdots p + (n-1)\,r\,\frac{2\pi}{n}$$

entsprechenden Endpunkte $0, 1, 2 \ldots (n-1)$ und die daselbst niedergelegten Punkte auf dem Kreisumfang gruppiren". Fallen dieselben dann wieder auf die Ecken eines regulären Polygons, so gelten für A, B, C, D die oben berechneten Werthe. Betrachten wir Fig. 54., so haben wir hier $n = 7$ und r von 1 bis 6 zu nehmen, und allgemein werden jene Punkte stets dann mit den Ecken eines regelmässigen Vielecks koïnzidiren, wenn n eine Primzahl ist, und r zwischen 1 und $(n-1)$ variirt. Reusch bemerkt dann weiter[230]):

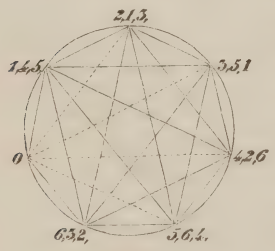


Fig. 54.

über die Fortpflanzung des Schalles vor, und finden sich u. A. bei Carnot[226]) und Schwerd[227]) ganz in der uns bekannten Gestalt.

226) *Carnot*, Neue Eigenschaften der Vielecke, deutsch v. Schellig, Dresden 1802. S. 33. 227) *Schwerd*, Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt, Mannheim 1835. S. 17. 228) *Reusch*, Ueber die Summen $\sum_{o}^{x} \sin(p + qx)$ und $\sum_{o}^{x} \cos(p + qx)$ und Verwandtes, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 11. Band. S. 536.
229) *Koller*, Ueber die Berechnung periodischer Naturerscheinungen, Ber. d. Wiener Akad. 1. Band. S. 147 ff. 230) *Reusch*, S. 539.

„Die Gruppirung der Punkte selbst anlangend, kann man Folgendes sagen: Für $r = 1$ und $r = n - 1$ legen sich die Punkte direkt auf die Ecke des n-Ecks, im ersten Falle rechtsläufig, im zweiten linksläufig; für ein zwischenliegendes r legen sich die Punkte in die Spitzen eines r-tourigen Sterns von n Zacken, oder kürzer eines r-tourigen n-Zacks. Von $r = 2$ bis $r = \frac{1}{2}(n - 1)$ sind die Sterne verschieden nach Massgabe der Sehnen 02, 03, 04 u. s. w. im ersten Kreise, kehren aber von $r = \frac{1}{2}(n + 1)$ bis $r = n - 2$ in derselben Form wieder, so dass für r und $(n - r)$ ihre Gestalt dieselbe, die Lage der Punkte gleicher Nummer aber entgegengesetzt ist. Bei der in der Figur eingehaltenen Darstellungsweise kann man auch sagen, die zweite Reihe von Gestalten sei das Spiegelbild der ersten." Um diess einzusehen, muss man jeden Eckpunkt nochmals mit der senkrecht darüber befindlichen Zahl markirt denken.

Zu §. 26. Vielleicht erfordert es die Vollständigkeit, mit einigen Worten der Gauss'schen Untersuchungen über das „*Pentagramma mirificum*" zu gedenken, so wenig auch diese Materie mit der Theorie der eigentlichen Sternfiguren zusammenhängt. Niedergeschrieben sind diese Betrachtungen bezüglich in den Jahren 1836 und 43, wie Schering[231]) angiebt, aber bekannt wurden sie der wissenschaftlichen Welt erst durch die im Jahre 1866 erfolgte Herausgabe des dritten Bandes von Gauss' sämmtlichen Werken[232]).

Der Grundgedanke ist der: Man bilde auf der Kugelfläche ein Fünfeck der ersten Art und verlängere die Seiten, durch deren Durchschnitt ein sphärisches Sternfünfeck (der zweiten Art) entsteht. Ueber diese Figuren, sowie über den dieselben aus dem Kugelzentrum projizirenden Kegel folgen dann eingehende Berechnungen, und zum Schluss wird auf die Beziehungen der resultirenden Formeln zu den elliptischen Funktionen hingewiesen.

Eine hübsche Rolle spielt das Sternfünfeck auch bei einer Frage, welche mit der von Möbius[233]) in die Wissenschaft eingeführten Lehre von den geometrisehen „Netzen" in Beziehung steht. Konstruirt man sämmtliche Diagonalen eines gewöhnlichen Fünfecks, so bilden deren Durchschnittspunkte ein neues Fünfeck der ersten Art, und so entsteht zu jedem Fünfeck der ersten ein kleineres der zweiten Art u. s. f. Wie Clebsch gezeigt hat[234]), giebt es im Innern des ursprünglichen Fünfecks Einen festen Punkt, welcher dem Innenraum sämmtlicher neu konstruirter Figuren angehört, so klein dieselben auch werden mögen, und es ergiebt sich so, wie diess aus den von Clebsch angestellten Rechnungen hervorgeht, eine rasch konvergirende Näherungsmethode für diejenige kubische Gleichung, welche die Kollineation je zweier aufeinanderfolgender Fünfecke bestimmt.

231) *Carl Friedrich Gauss* Werke, 3. Band, Göttingen 1866. S. 495. 232) *Ibid.* S. 481 ff. 233) *Möbius*, Baryc. Calcul, S. 266 ff. 234) *Clebsch*, Ueber das ebene Fünfeck, Mathem. Annalen, 4. Band. S. 476 ff.

Clebsch hat den hier skizzirten Vorgang lediglich von seiner geometrischen Seite aufgefasst; wollen wir uns über sein analytisches Verhalten klar werden, so thun wir am besten, den speziellen Fall eines regulären Fünfecks zu Grunde zu legen. Dann lässt sich um je zwei zusammengehörige Fünfecke verschiedener Arten ein und derselbe Kreis beschreiben, und der Radius dieses Kreises nimmt, wie eine leichte Rechnung zeigt, in geometrischer Progression ab, deren letztes Glied somit Null wäre; diess ist aber an sich klar, denn offenbar fällt jener Konvergenzpunkt hier mit dem Mittelpunkt sämmtlicher konzentrischer Kreise zusammen. In ähnlicher Weise wird sich die Sache aber auch bei einem beliebigen Fünfecke gestalten, nur darf dasselbe selbstverständlich keine einspringenden Winkel haben.

Kapitel II.

Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung.

§. 1. Wenn wir es unternehmen, die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen historisch zu verfolgen, so müssen wir fast besorgen, dass die vorhandene Literatur uns nur sehr spärliches Material an die Hand geben kann. Es wird sich jedoch herausstellen, dass die Mathematiker von sehr früher Zeit an sich mit diesen Formen beschäftigten, sobald wir nur darauf Rücksicht nehmen, dass der aufsteigende Kettenbruch

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

dem Aggregate

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}$$

gleich ist. Denn diese Identität nöthigt uns auch die Sexagesimal- und Dezimalbrüche mit in den Bereich unserer Untersuchung zu ziehen — merkwürdigerweise scheint die Lehre von diesen Gebilden noch gar nicht von dem hier angedeuteten Standpunkte aus aufgefasst worden zu sein. Indess auch abgesehen hiervon werden wir eine Reihe von Thatsachen namhaft zu machen im Stande sein, welche sich bisher der Beachtung entzogen haben.

§. 2. Das erste bewusste Auftreten der aufsteigenden Kettenbrüche glauben wir bei den alten Hebräern nachweisen zu können, und zwar verdanken sie demjenigen Zweige der angewandten Mathematik, welcher überhaupt die erste Veranlassung zur Erfindung und Anwendung approximativer Methoden gab, der Chronologie, ihre Entstehung. Als man die

Länge des Monates zuerst festzustellen unternahm — und zwar soll diese Aufgabe den Kindern Isaschar übertragen gewesen sein — nahm man als erste Näherung naturgemäss die Länge von 29 Tagen an. Fortgesetzte Beobachtung liess die Hinzufügung einer Korrektion nothwendig erscheinen, der numerische Werth dieser Korrektion wurde, wie Schwarz[1]) angiebt, durch folgende Betrachtung bestimmt. Nach 2 Monaten hatte sich eine Differenz von einem Tage ergeben, ebenso nach 3 Jahren, hierzu kam eine weitere Verspätung um eine Stunde nach 30 Jahren und nach 2160 Monaten. So entstand als Zusatzglied

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{72}=\frac{2}{3}+\frac{2}{30}+\frac{2}{2160}.$$

In der That hat diese von Schwarz einem alten Chronologen entnommene Deutung vieles für sich, indem sie recht klar zeigt, wie mit der längeren Dauer der Beobachtung die Schärfe der numerischen Bestimmung wuchs.

§. 3. Wenn wir vorläufig die speziellen Fälle ganz ausser Acht lassen, wo in den Theilnennern des aufsteigenden Kettenbruches irgend welche Periodizität obwaltete, so bietet uns zuerst wieder die Logistik der Griechen Gegenstand zu einer Bemerkung. Wir meinen das durch die ganze praktische Rechenkunst dieses Volkes sich hindurchziehende Bestreben, allgemeine Brüche zu vermeiden und jede solche Form, sobald sie sich nicht umgehen liess, durch Zerlegung in Einheitsbrüche wenigstens unschädlich zu machen. Wir können sagen:

Die Griechen rechneten konsequent nur mit Brüchen des Zählers 1 *und wandten zur Zerfällung willkürlicher Brüche Methoden an, die im Wesentlichen mit der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen aufsteigenden Kettenbruch identisch sind.*

In diesem Sinne setzt, wie Nesselmann[2]) angiebt, Eutokius den Bruch

$$\frac{49}{64}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{64}.$$

1) *Schwarz*, der jüdische Kalender historisch und astronomisch untersucht, Breslau 1872. S. 48. 2) *Nesselmann*, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. S. 113.

Genügte eine solche Zerlegung nicht, so machte man auch deren zwei und setzte einen willkürlichen Bruch gleich der Summe zweier aufsteigender Kettenbrüche. So führt Hankel[3]) das Beispiel

$$\frac{12}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{6.13}$$

an. Selbst kleine Vernachlässigungen werden nicht gescheut, und Nesselmann hat in sehr geistreicher Weise (s. o.) die Art und Weise aufgedeckt, durch welche Eutokius die nur näherungsweise richtige Relation

$$\frac{15}{64} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$$

etwa gefunden haben könnte.

Die Griechen stehen in diesem Kapitel offenbar nicht auf originellem Boden, die hier angewandten Betrachtungen harmoniren nur wenig mit dem, was wir sonst unter hellenischer Mathematik zu verstehen gewohnt sind, dieselben stehen vielmehr, wie Hankel (s. o.) bemerkt, in dieser Beziehung „in völliger Abhängigkeit von den Aegyptern, welche überall, in ihren hieroglyphischen Urkunden auf Tempelwänden und ihren demotischen Schriften auf Papyrus, die Brüche durch Reihen von Stammbrüchen, welche nach der angegebenen Regel berechnet sind, ausgedrückt haben und ebenso, wie die Griechen, besondere Zeichen für die einfachsten Stammbrüche besitzen". Die nahe bevorstehende Publikation des Papyrus Rhind wird uns in dieser Hinsicht noch manchen wichtigen Aufschluss zu Theil werden lassen.

§. 4. Eine noch weit ausgedehntere Anwendung mussten die aufsteigenden Kettenbrüche bei den Römern finden, welche nur über eine relativ geringe Anzahl von „Minutien" verfügten und jede sonst irgendwie ihnen vorkommende Bruchgrösse so gut es gehen wollte durch diese wenigen Stammformen auszudrücken gezwungen waren. Ja in gewissem Sinne kannten die Römer nur aufsteigende Kettenbrüche, deren Nenner durch die Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben waren. So wäre beispielsweise nach römischer Schreibweise

---

3) *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 62.

I semuncia + III sicilici + V dimidiae sextulae + XI scripuli

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{11}{2}.$$

Kamen dann Theilungen durch Zahlen vor, welche sich nicht als einfache Multipla von 2 darstellen liessen, so wandte man, ganz analog wie die Griechen, ein Näherungsverfahren an und setzte den unbequemen Bruch einem Kettenbruche gleich, dessen Theilzähler nicht mehr ausschliesslich ganze, sondern theilweise gebrochene Zahlen waren. In dieser Beziehung ist ein Beispiel von hohem Interesse, welches uns der verhältnissmässig kenntnissreichste Gromatiker, der Hydrotechniker Frontinus, überliefert hat. Derselbe sucht das Verhältniss zweier ähnlicher Flächen zu bestimmen, deren Durchmesser bezüglich den Zahlen

$$1\frac{1}{4} \text{ und } 1\frac{1}{3}$$

proportional sind. Der zweite Flächenraum[4]) *„capit plus, quam quinaria, quinariae octava, hoc est sescuncia quinariae et scripulis tribus et besse scripuli"*. In Zahlen ausgedrückt heisst diess: Es ist näherungsweise

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 : \left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{3\frac{2}{3}}{36}.$$

Der letzte Theilbruch konnte dann wieder als zweigliedriger aufsteigender Kettenbruch ausgesprochen werden. Friedlein[5]) hat sich die Aufgabe gestellt, die leitenden Gedanken des Frontinus wieder herzustellen, und entwickelt zu dem Ende ein Verfahren, welches ganz allgemein als Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen aufsteigenden Kettenbruch bezeichnet werden muss. Es ist nach ihm approximativ

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 : \left(1\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{256}{225} = 1 + \frac{31}{225} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{23}{225,8}$$

$$= 1 + \frac{1}{8} + \frac{3}{288} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{288} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{3}{36} + \frac{2}{3}.$$

4) *Iulii Frontini de aquis urbis Romae Libri II, ed. Buecheler*, Lipsiae 1858. S. 14. 5) *Friedlein*, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert, Erlangen 1869. S. 91.

An einer andern Stelle[6]) würde die strikte Befolgung des von Frontinus eingeschlagenen Weges zu dem Kettenbruche

$$22 + \frac{5}{12} + \frac{2}{24} + \frac{1}{7}$$

führen, doch werden die beiden letzten Theilbrüche einfach weggelassen.

Auch in dem ganz auf römischem Boden erwachsenen „*Calculus*“ des Victorius spielen die aufsteigenden Kettenbrüche naturgemäss eine Rolle; so wird z. B. das Quadrat von $1\frac{1}{4}$ in der Form

$$1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

angegeben[7]).

§. 5. Nachdem wir so bereits an die Schwelle des Mittelalters gelangt sind, ist es wohl an der Zeit, auch von jenen aufsteigenden Kettenbrüchen zu sprechen, deren Theilnenner eine Periode befolgen. Es kann hier natürlich nur von dem einfachsten Falle der Periodizität die Rede sein, von dem Falle

$$a = a_1 = a_2 = \cdots = a_n;$$

ja wir dürfen sogar sagen, dass der allgemeinere Fall einer Periode von beliebig vielen Gliedern bis auf den heutigen Tag noch seine Erledigung nicht gefunden hat. Auch sind es nur zwei ganz spezielle Werthe von a, welche uns hier beschäftigen werden, nämlich

$$a = 60 \text{ und } a = 10.$$

Im ersteren Falle haben wir die sechzigtheiligen, im zweiten die zehntheiligen Brüche. Das römische duodezimale System haben wir bereits kennen gelernt, indem wir es mangelnder Konsequenz halber nicht an dieser Stelle besprechen wollten. Ferner erwähnt Pihan[8]) noch eines bei gewissen hindostanischen Volksstämmen vorkommenden Systemes, in welchem $a = 4$ ist, und bei den Aegyptern tritt, wie bereits angedeutet,

6) *Friedlein*, S. 93. 7) *Ibid.* S. 95. 8) *Pihan, Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes*, Paris 1860. S. 113 ff.

hie und da ein periodisches System $a = 2$ auf. So wird Lepsius[9]) zufolge der Inhalt eines Vierecks mit den Seiten $8\frac{1}{8}$, 11, 5, 10 durch den periodischen Kettenbruch

$$68 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

dargestellt.

Das bei den Indern sich findende Sexagesimalsystem war Cantor anfänglich geneigt[10]) auf griechischen Ursprung zurückzuführen. In seiner Rezension von Cantor's Werk erhob Henri Martin gegen diese Auffassung Einsprache. Er wies nach[11]), dass die in babylonischen Denkmälern sich vorfindenden Brüche ausschliesslich durch ihre Zähler ausgedrückt seien, während man den stets gleichen Nenner, die Zahl 60, konsequent unterdrückte. Es müsse deshalb nach Babylon der Ursprung der Sexagesimaltheilung verlegt werden, sowohl was die Theilung von Kreis und Tag, als auch die noch heute im gleichen Sinne erfolgende Theilung von Grad und Stunde betrifft. Uebrigens war Cantor selbst[12]), ohne von diesen Ergebnissen der Keilschrift-Forschung Kenntniss zu haben, durch ganz andere Schlüsse auf ähnliche Gedanken gekommen. Martin hält es mit Rücksicht hierauf für nöthig, dem indischen Sexagesimalsystem nicht sowohl einen griechischen, als vielmehr einen babylonischen Ursprung zu vindiziren[13]).

§. 6. Das von den Chaldäern adoptirte sechzigtheilige System bildete mit Naturnothwendigkeit auch die Grundlage ihrer Astronomie, und so konnte es nicht fehlen, dass auch die griechischen Mathematiker, insoweit sie numerisch rechnen mussten, dies System adoptirten und ihm zur Alleinherrschaft verhalfen. Der erste griechische Astronom, über dessen Leistungen uns ein gültiges Urtheil zusteht, war Claudius Ptolemäus, und bei ihm finden wir auch bereits die sechzigtheiligen Brüche ausschliesslich angewandt. „Von da an“ — sagt Hankel[14]) — „sind die Sexagesimalbrüche, bis sie im 16. Jahrhundert

9) *Lepsius*, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel zu Edfu, Abhandl. d. phil.-hist. Klasse d. Akademie. Berlin 1855. S. 75. 10) *Cantor*, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle 1863. S. 272. 11) *H. Martin*, *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge*, Annali di matematica pura ed applicata, Tomo V. S. 265. 12) *Cantor*, S. 361 ff. 13) *H. Martin*, S. 362. 14) *Hankel*, S. 65.

von den Dezimalen verdrängt wurden, in allen astronomischen und mathematischen numerischen Rechnungen herrschend geblieben". Wenn dies nun auch keineswegs so verstanden werden darf, als falle die erste Verwendung der Dezimalbrüche in eine so späte Periode, so ist doch dies gewiss, dass das ganze Mittelalter hindurch das ältere System einen steten Vorrang zu behaupten wusste.

Die Rechnungen, welche sich im Almagest selbst vorfinden, gewähren nur geringen Einblick in den eigentlichen Mechanismus des Kalküls, insofern die Mittelglieder gewöhnlich unterdrückt werden. In dieser Hinsicht ist uns dagegen der Kommentar des Alexandriners Theon von hohem Interesse, insofern uns darin wirkliche Rechnungen dargeboten werden. Dazu kommt, dass Theon uns auch die wenigen theoretischen Hülfsmittel klar vor Augen legt, deren er für seine praktischen Zwecke bedarf.

Wir finden bei Theon die vier Spezies, sowie auch die Quadratwurzelausziehung für aufsteigende Kettenbrüche vom Theilnenner 60 *theoretisch wie praktisch durchgeführt.*

Die beim Multipliziren und Dividiren massgebende Regel wird von Theon mit grosser Umständlichkeit auseinandergesetzt. Wir können uns leicht darüber Rechenschaft geben, wenn wir das Produkt

$$\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$$

bilden. Für $m = 1$ bleibt die „Spezies" des Multiplikanden unverändert, für $m = 2$ erniedrigt sie sich um 2, allgemein also um m Einheiten, und das Gleiche findet, nur in umgekehrter Richtung, auch beim Dividiren statt. Die Potenzformeln

$$a^m \cdot a^{\pm n} = a^{m \pm n}$$

waren bekannt, freilich jedoch nur für diejenigen ganzzahligen Werthe von m und n, welche möglicherweise in der Rechnung vorkommen konnten, d. h. also für alle Werthe von m und n

$$\leq 4.$$

An die von Theon mitgetheilte Quadratwurzelausziehung, zu welcher Nesselmann[15]) eine höchst instruktive Paraphrase

15) *Nesselmann*, S. 141 ff.

geliefert hat, möchten wir noch eine kurze Bemerkung anknüpfen.

Wir haben an anderer Stelle[16]) darauf hingewiesen, dass in einer mit Unrecht vergessenen Abhandlung von Buzengeiger[17]) eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Auffassung dieser Theon'schen Methode sich findet. Geometrisch stellt sich nämlich diese Methode gewissermassen als ein Ausfluss der altgriechischen Exhaustionsmethode dar, indem das Quadrat, dessen Seite berechnet werden soll, durch immer neue in dasselbe gelegte Quadrate ausgefüllt wird. Bezeichnet in der Sprache unserer Algebra A die Seite des gegebenen Quadrates, a die Seite des nächst kleineren und α die des nächst grösseren, und versteht man weiterhin unter a_1, a_2, a_3 ... die Reihe der angenäherten Werthe, welche das Theon'sche Verfahren liefert, so zeigt Buzengeiger, dass man durch dasselbe zu folgenden Gleichungen gelangt:

$$a_1 = \alpha - \frac{\alpha^2 - A^2}{a + \alpha}, \quad a_2 = \alpha - \frac{\alpha^2 - A^2}{a_1 + \alpha}, \quad a_3 = \alpha - \frac{\alpha^2 - A^2}{a_2 + \alpha} \cdots$$

Buzengeiger scheint übersehen zu haben, dass dies nichts anderes ist als die bekannte Kettenbruchentwickelung, welche gewöhnlich dem Italiener Cataldi zugeschrieben wird, denn man erhält durch einfache Substitution z. B.

$$a_3 = \alpha - \cfrac{\alpha^2 - A^2}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A^2}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A^2}{2\alpha}}}.$$

Auf der andern Seite drückt dagegen Theon den erhaltenen angenäherten Wurzelwerth wieder in Form eines aufsteigenden Kettenbruches aus, und wir bemerken so eine interessante Thatsache:

Eine und dieselbe Grösse wird bei Theon als aufsteigender und als absteigender Kettenbruch dargestellt — das erste allerdings noch unbewusste und durch die geometrische Einkleidung verhüllte Beispiel der Umwandlung der einen in die andere Form.

---

16) *Günther-Sparagna, Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all' Euler*, Bullett. di bibl. e di storia delle scienze mat. e fisiche, Tomo VII. S. 215. 17) *Buzengeiger*, Methode der griechischen Geometer, um für die Wurzeln solcher Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, annähernde rationale Brüche zu finden, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissenschaften, 5. Band. S. 89.

§. 7. Die sexagesimalen Brüche finden wir auch im Mittelalter das Feld der praktischen Rechnung beherrschend. Nur der Vollständigkeit halber seien die beiden Hauptwerke über diese Materie erwähnt, denn viel Neues für die Sache selbst lernen wir nicht aus ihnen. Das eine davon ist die astronomische Logistik des Mönches Barlaam[18]), dessen Lebenszeit, nach Poggendorff's Angabe[19]), ungefähr zwischen die Jahre 1290 und 1348 fällt. Kästner[20]) theilt Näheres über die Lebensumstände dieser jedenfalls interessanten Persönlichkeit mit. Barlaam steht im wesentlichen auf dem Boden der geometrischen Arithmetik Euclid's und beweist seine Sätze durch Konstruktionen. Nach Wolf[21]) enthält sein Werk *„Exactam theoriam ad demonstrandas operationes communes arithmeticae practicae cum in numeris integris, tum fractis, sive vulgaribus, sive sexagenariis"*.

Ungefähr zur gleichen Zeit lebte der Byzantiner Maximus Planudes, der durch seine Arbeit die indische Rechenkunst seinen Landsleuten zuzuführen gedachte. So wichtig diese Schrift für die Geschichte der Mathematik im Allgemeinen ist, so hat doch die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen durch ihn keine bedeutende Förderung erfahren, denn gerade da, wo die Sexagesimalbrüche auftreten, in den Abschnitten über Thierkreisrechnung und über die Ausziehung der Quadratwurzel, hat Planudes griechische Quellen benutzt, namentlich Theon's Kommentar zum Almagest des Ptolemäus[22]). Nur in einem allerdings bemerkenswerthen Punkte verlässt er sein Vorbild. Wenn nämlich allgemein mit

$$\frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \frac{a_3}{60^3} + \cdots$$

in

$$\frac{b_1}{60} + \frac{b_2}{60^2} + \frac{b_3}{60^3} + \cdots$$

dividirt werden soll, so verwandelt er, um nicht stets die

18) *Barlaam*, *Astronomia logistica ed. Chambers*, Londini 1600. 19) *Poggendorff*, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 1. Band, Leipzig 1863. S. 102. 20) *Kästner*, Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796. S. 44 ff. 21) *Wolf*, *Elementa matheseos*, Tom. V, Lipsiae 1741. S. 280. 22) Das Rechenbuch des *Maximus Planudes*. Nach den Handschriften der kaiserlichen Bibliothek zu Paris herausgegeben von C. J. Gerhardt, Halle 1865. S. V.

Theon'schen Potenzregeln in Anwendung bringen zu müssen, alle Brüche in solche mit gemeinschaftlichem Nenner und führt erst dann die Division wirklich aus. Praktisch wird allerdings ein solches Verfahren bequemer sein, aber man erkennt auch, dass die mehr allgemein gehaltenen Vorschriften Theon's, wie wir sie oben skizzirt haben, um jene Zeit bereits wieder in Vergessenheit gerathen waren.

Es geht schon aus dem Gesagten hervor, dass auch dem indischen Volke das sexagesimale System geläufig war, und in der That sahen wir bereits oben, dass wahrscheinlich in einer relativ frühen Periode durch babylonischen Einfluss eine Uebertragung dieses Systems nach Indien stattfand. Auch wissen wir, dass die indische Trigonometrie ganz auf der Sechzigtheilung basirte.

Wir haben durch Verfolgung der speziellen Form bereits dem Gange unserer Untersuchung vorgegriffen, und wir müssen deshalb, ehe wir uns zur geschichtlichen Darstellung der Dezimalbruchrechnung wenden, die allerdings nur sporadischen Erscheinungen registriren, in welchen wir den allgemeinen Fall des aufsteigenden Kettenbruches auftreten sehen.

§. 8. Die Verwandlung irgend einer Zahlgrösse in einen aufsteigenden Kettenbruch war in all den Fällen, welche uns bis jetzt beschäftigten, nie mit der bewussten Absicht vorgenommen worden, dadurch auf eine neue Grössenform zu kommen, man verfolgte vielmehr rein praktische Zwecke dabei. Die erste Ausnahme von dieser Regel macht der arabische Mathematiker Al Kalsadî, ein Gelehrter, dessen wir auch in der Geschichte der gewöhnlichen Kettenbrüche mit Achtung gedenken mussten[23]). Wir entnehmen dem historischen Abriss, welchen Hankel von den mathematischen Leistungen der Araber giebt, nachstehende bedeutsame Stelle: „Sehr wichtig ist die von Al Kalsadî unter dem Namen „Denomination" gelehrte Divisionsmethode, bei welcher ein Bruch, dessen Nenner N die Faktoren a_1, a_2, a_3 ... von absteigender Grösse enthält, in der Form

$$\frac{M}{N} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_1 a_2} + \frac{m_3}{a_1 a_2 a_3} + \cdots$$

gesetzt und durch $\frac{\cdots m_3 m_2 m_1}{\cdots a_3 a_2 a_1}$ bezeichnet wird"[24]).

23) *Günther*, S. 219. 24) *Hankel*, S. 257.

So würde in arabischer Schreibweise der aufsteigende Kettenbruch

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{425}{738}$$

gesetzt werden müssen. Leider erfahren wir nichts davon, ob etwa noch weitere Betrachtungen über diese Denominationsmethode angestellt worden sind; jedenfalls hat sie auf Leonardo (s. §. 9.) eingewirkt.

Dass bei den Arabern auch die sechzigtheiligen Brüche sich vorfinden würden, ist von vornherein zu erwarten, denn da ihre wissenschaftliche Kultur gleichmässig durch griechische und indische Einflüsse bedingt war, so musste auch dieses beiden Völkern geläufige System bei ihnen rasch Eingang finden. Die Araber selbst waren freilich geneigt, die Erfindung allein den Indern zuzuschreiben. Cantor[25]) führt einen Beleg hiezu an aus einer in lateinischer Sprache uns überlieferten arabischen Rechenkunst, welche wahrscheinlich von Mohammed ben Musa herrührt.

§. 9. Verlassen wir jetzt die Araber und wenden uns zu den Mathematikern des mittelalterlichen Abendlandes. Indem wir nur vorübergehend der Arithmetik des Johannes Hispalensis[26]) erwähnen, welche einen kurzen Abriss der Lehre von den Sexagesimalbrüchen, jedoch ohne irgend welche Eigenthümlichkeiten, giebt, gelangen wir zu dem grössten Mathematiker, den das Mittelalter hervorgebracht hat, zu Leonardo Fibonacci. Bereits Cantor[27]) hob die Verdienste dieses Mannes in der uns hier beschäftigenden Angelegenheit hervor, und auch Friedlein[28]) giebt eine klare Zusammenstellung der vier neuen Formen, durch welche Leonardo die Bruchrechnung seiner Zeit erweiterte. Zwei dieser Formen sind, wie sich uns ergeben wird, nichts anderes als eben aufsteigende Kettenbrüche.

Es wird zunächst die Schreibweise gewöhnlicher Brüche ganz in der uns geläufigen Art gelehrt, und dann heisst es: *„Item si sub eadem uirgula plures numeri positi fuerint, et super unum quemque ipsorum alii numeri describentur, numerus qui in*

25) *Cantor*, S. 219. 26) *Trattati d'aritmetica pubblicati da Baldassare Boncompagni*, Roma 1857. II. *Ioannis Hispalensis liber algorismi de practica arismetrice.* 27) *Cantor*, S. 354. 28) *Friedlein*, S. 72.

capite uirgule dextere partis super numerum positus fuerit ipsius, sub positi numeri partem uel partes ut prediximus denotabit. Qui uero super secundum ipsius secundi partes de partibus primi sub positi numeri declarat. Qui autem super tertium, ipsius tertii partes partium secundi de partibus primi affirmat, et sic semper qui sequentur super uirgulam partes partium cunctorum antecedentium sub uirgula denotant, ut si sub quadam uirgula fiat 2 *et* 7 *et super* 2 *sit* 1 *et super* 7 *sint* 4 *ut hic cernitur, denotantur quattuor septime, et medietas unius septime. Si autem super* 7 *esset zephyrum sic.* $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ *medietas tantum unius septime denotaretur. Item sub quadam alia uirgula sint* 2 *et* 6 *et* 10; *et super* 2 *sit* 1; *et super* 6 *sint* 5 *et super* 10 *sint* 7 *ut hic ostenditur.* $\frac{1\ 5\ 7}{2\ 6\ 10}$ *septem que sunt super* 10 *in capite uirgule representant septem decenas, et* 5 *que sunt super* 6 *denotant quinque sextas unius decime partis, et* 1 *quod est super* 2 *denotat medietatem sexte unius decime partis, et sic singulariter de singulis intelligatur: tamen monendum est ut semper minores numeri sint uersus sinistram sub eadem uirgula: sed si plures fuerint uirgule rupti unius uirgule non respondent ruptis alterius, et illa uirgula que est major pars integri, semper est ponenda uersus dexteram manum. Dicuntur quidem fractiones, que sunt in una uirga, esse in gradibus, et est primus gradus earum fractio, que est in capite uirge a dextera parte. Secundus est fractio sequens uersus sinistram quereret. Verbi gratia in suprascripta uirga, scilicet in* $\frac{1\ 5\ 7}{2\ 6\ 10}$ *sunt* $\frac{7}{10}$ *in primo gradu ipsius uirge et* $\frac{5}{6}$ *sunt in secundo, et* $\frac{1}{2}$ *est in tertio, hoc est in ultimo gradu eiusdem uirge, et sic quot sunt numeri sub uirga, tot sunt gradus eiusdem*"[29]).

Diese Stelle enthält die Beschreibung derjenigen Brüche, welche Friedlein (s. oben) als erste Kategorie aufgeführt hat. Abgesehen von der für uns ziemlich unverständlichen Limitation, welche für jeden aufsteigenden Kettenbruch

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

29) *Il liber Abbaci di Leonardo Pisano pubblicato da Baldassare Boncompagni*, Roma 1857. T. I. S. 24.

die Ungleichungen

$$b_1 > b_2 \ldots > b_n,$$
$$a_1 > a_2 \ldots > a_n,$$

festsetzt, ziehen wir aus dieser Beschreibung das Resultat:

Die Formen, welche Leonardo unter dem bezeichnenden Namen „fractiones in gradibus" uns kennen lehrt, stimmen vollständig mit unseren aufsteigenden Kettenbrüchen überein.

Betrachten wir nunmehr auch die zweite Kategorie Friedlein's. Leonardo fährt in seiner Darstellung folgendermassen fort[30]): *„Et si in uirga fuerint plures rupti, et ipsa uirga terminauerit in circulo, tunc fractiones eius, aliter quam dictum sit denotabunt, ut in hac* $\cdot \frac{2\,4\,6\,8}{3\,5\,7\,9} \bigcirc$ *cuius uirge fractiones denotant, octo nonas unius integri, et sex septimas de octononis, et quatuor quintas sex septimarum de octo nonis et duas tertias quattuor quintarum sex septimarum de octo nonis unius integri".*

Es wäre hiernach

$$\frac{2\,4\,6\,8}{3\,5\,7\,9}\bigcirc = \frac{8}{9} + \frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9} + \frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9} = \frac{8}{9} + \frac{48}{7} + \frac{192}{5} + \frac{384}{3}\cdot$$

Auch diese „Brüche mit einem Ring rechts", wie sie Friedlein nennt, sind also durch aufsteigende Kettenbrüche darstellbar; der Unterschied besteht blos darin, dass die oben angegebenen Ungleichungen jetzt weggefallen sind und als Theilbrüche auch unächte, beziehungsweise scheinbare Brüche zugelassen werden.

Die beiden anderen Kategorien Friedlein's beziehen sich auf gewisse Abkürzungen, welche für uns ein weiteres Interesse nicht darbieten.

Die aufsteigenden Kettenbrüche stehen übrigens bei Leonardo nicht blos als unvermittelter geistreicher Einfall da, er weiss vielmehr auch von denselben einen ausgedehnten praktischen Gebrauch zu machen. Friedlein hat eine sehr übersichtliche Darstellung der Umsetzungen gegeben[31]), welche Leonardo mit seinen Brüchen vornimmt. Ein besonders instruktives Beispiel ist die Multiplikation zweier aufsteigender

30) *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano pubblicato da Baldassare Boncompagni*, Roma 1857. T. I. S. 24. 31) *Friedlein*, S. 145 ff.

Kettenbrüche, indem zuerst dieselben in gewöhnliche Brüche verwandelt und dann multiplicirt werden, während das Resultat wieder in Form eines aufsteigenden Kettenbruches ausgesprochen wird[32]).

§. 10. Obwohl wir in unserem Gange der Untersuchung keineswegs streng synchronistisch zu Werke gehen, so müssen wir doch nothgedrungen jetzt von dem allgemeinsten Falle der aufsteigenden Kettenbrüche ablassen, denn zwischen Leonardo und denjenigen Mathematikern, welche die vernachlässigte Lehre wieder aufnahmen, liegt ein Zeitraum von nicht weniger als 500 Jahren. Dagegen müssen wir jetzt den Spezialfall des periodischen Theilnenners 10 ins Auge fassen und zusehen, wie sich allmälig der Sieg des zehntheiligen über den sechzigtheiligen Bruch herausbildete.

Die erste Veranlassung zur Fortsetzung der nach Potenzen von 10 geordneten Zahlenreihe auch nach der negativen Seite hin lieferte die Ausziehung der Quadratwurzel aus irrationalen Zahlgrössen. So berichtet Hankel[33]) schon von der indischen Arithmetik: „Dezimalbrüche im heutigen Sinne kommen nicht vor; doch hängen die Inder bei Wurzelausziehungen, die mit grösserer Genauigkeit vorgenommen werden sollen, eine Anzahl Nullen an und dividiren dann den erhaltenen Werth durch die entsprechende Potenz von 10".

Den ersten bewussten Gebrauch der Dezimalbrüche hat Cantor bei einem spanischen Juden des elften Jahrhunderts, bei den schon oben (§. 9.) angeführten Johann v. Sevilla (Hispalensis) nachgewiesen[34]); da derselbe aber wohl kaum selbstständig arbeitete, sondern sicherlich von arabischen Gelehrten inspirirt war, so werden wir wohl gewiss mit Cantor einen noch weit früheren Ursprung dieser Methode annehmen dürfen.

Den besten Einblick in dies historisch so überaus wichtige Verfahren des Johann v. Sevilla glauben wir dadurch geben zu können, dass wir die von Friedlein[35]) gelieferte übersichtliche Beschreibung desselben hier wörtlich wiedergeben: „Endlich wird das Ausziehen einer Wurzel unter Anhängung

32) *Friedlein*, S. 149. 33) *Hankel*, S. 185. 34) *Cantor*, S. 275. 35) *Friedlein*, S. 154.

(*preponere* nach der arabischen Anschauung) von Nullen gelehrt. Bei der Wurzel lässt man dann so viele Stellen stehen, als die Hälfte der angehängten Nullen ausmacht, die Stellen, welche über diese Hälfte darüber vorhanden sind, geben die Grade der Wurzel, die Minuten, Sekunden u. s. w. werden durch Multiplikation der stehengebliebenen Zahlen mit 60 und Wegnahme der Stellen, die über jener Hälfte vorhanden sind, der Reihe nach gefunden, z. B. $\sqrt{2} = \sqrt{200\ 00\ 00} = 1414$ *et aliquid modicum.* 6 Nullen wurden angehängt, drei Stellen bleiben stehen, darüber ist 1, also hat man 1^0; $414 \cdot 60 = 24840$, drei Stellen bleiben stehen, darüber ist 24, also hat man $24'$; ebenso findet man $50''\ 24'''$.... Dasselbe Verfahren, heisst es weiter, kann man auch dann anwenden, wenn zu dem Ganzen noch *fractiones*, d. h. Minuten, Sekunden u. s. w. gegeben sind, indem man alles auf die kleinste Benennung bringt, Nullen anhängt, die Wurzel auszieht und diese wieder auf die höheren Benennungen bringt".

§. 11. Die Erfindung des Johannes Hispalensis, oder besser gesagt, die Erfindung, deren erste Mittheilung wir ihm verdanken, trug zunächst keine weiteren Früchte. Indess ist anzunehmen, dass die von ihm gelehrte Regel, ihrer ungemeinen Bequemlichkeit halber, immerhin einige Verbreitung gewann. Diejenige mathematische Wissenschaft jedoch, welche die erste Veranlassung zur Erfindung der eingliedrig periodischen aufsteigenden Kettenbrüche gab, war nicht sowohl die reine, als vielmehr die astronomische Logistik in Verbindung mit der Trigonometrie. Und auf trigonometrischem Boden sollte denn auch die eigentliche Theorie und Praxis der Dezimalbruchrechnung erwachsen.

Zunächst freilich hielt es schwer, vom sexagesimalen System sich loszusagen, welches durch seine astronomische Verwendung ehrwürdig geworden war. Auch lieferte der grosse Nenner 60 eine sehr rasch abnehmende Reihe, und dies sagte dem übertriebenen Genauigkeitssinn der damaligen Sternkunde zu, deren Vertreter, obschon sie in ihren direkten Bestimmungen eines halben Grades sich kaum versichert halten konnten, trotzdem in ihren Rechnungen die peinlichste Genauigkeit liebten. Ein geradezu ergötzliches Beispiel hiefür liefern uns die berühmten Alfonsin'schen Tafeln, wo eine gewisse Grösse in der Form

$$a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3} + \frac{e}{60^4} + \frac{f}{60^5} + \frac{g}{60^6} + \frac{h}{60^7} + \frac{i}{60^8} + \frac{k}{60^9} + \frac{l}{60^{10}}$$

dargestellt wird[36]).

Die Schwierigkeit, sich von dem liebgewonnenen Nenner 60 zu trennen, hatte die Entstehung gewisser Uebergangssysteme zur nothwendigen Folge, in welchen sich das dezimale mit dem sexagesimalen System in eigenthümlicher Weise verquickt zeigte. Einer freilich wenig zuverlässigen Angabe von Wallis[37]) zufolge hätten bereits die Araber solche Systeme gebraucht; Arzachel soll den Durchmesser in

$$\frac{60 \cdot 10}{2} = 300$$

Theile getheilt und die so gewonnene Einheit dem trigonometrischen Kalkül zu Grunde gelegt haben. Steinschneider thut dessen in seinen umfangreichen Notizen über Arzachel keine Erwähnung[38]).

Dagegen bildete ein solches Vermittelungssystem die Grundlage für die Bemühungen eines Mannes, auf den wir die Reform der Astronomie und damit auch der Mathematik zurückzuführen gewohnt sind, des Georg Peurbach.

§. 12. Die trigonometrischen Tafeln Peurbach's[39]) sind für den Sinus totus

$$60 \cdot 10000 = 600000$$

berechnet. Vermuthlich würde er selbst bei längerem Leben sich der reinen Dezimaltheilung zugewendet haben, denn sein Schüler Regiomontanus trat in seinen trigonometrischen Arbeiten ganz in die Fusstapfen seines Lehrers ein. Ihm verdankt die Lehre von den Dezimalbrüchen wohl am meisten, weniger in theoretischer Beziehung, als vielmehr durch ihre von Regiomontan vollzogene unzertrennliche Verknüpfung mit den goniometrischen Tafeln. „Derselbe war," wie sich Cantor[40]) ausdrückt, „kühner und konsequenter als sein Lehrer.

36) *Maedler*, Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit, 1. Band, Braunschweig 1873. S. 101. 37) *Wallis*, *opera omnia*, T. II. Oxonii 1693. S. 29. 38) *Steinschneider*, *Vita di matematici Arabi tratte da un' opera inedita di Bernardino Baldi con note di M. Steinschneider*, Bullett. di bibliogr. e di storia delle scienze matem. e fisiche. Tomo V. S. 508 ff. 39) *Kästner*, 1. Band. S. 530 ff. 40) *Cantor*, Recension zu: *Alexander Ziegler*, *Regiomontanus*, ein geistiger

Er setzte, wenigstens in einigen seiner Arbeiten, den Halbmesser = 10000 mit durchweg dezimaler Untertheilung und hat damit das Seinige zur Verbreitung der Dezimalbrüche in Europa beigetragen".

Die Angabe Cantor's, dass Regiomontan nur theilweise die dezimale Theilung zu Grunde gelegt habe, bezieht sich offenbar auf des letzteren Schrift: *Compositio tabularum sinuum rectorum per Ioannem de Regiomonte*, welche erst viel später zugleich mit einer kleinen Arbeit Peurbach's von dem bekannten Nürnberger Mathematiker Schoner edirt wurde[41]). Hier hält Regiomontan allerdings noch an der Idee seines Meisters fest, insofern er seinen Radius in 600000 Theile eintheilt. Kästner[42]), welcher von den genannten Werken ausführlichere und bessere Auskunft giebt, als man dies sonst bei ihm gewöhnt ist, glaubt aus jenem Umstande den Schluss ziehen zu dürfen, dass dem jüngeren Gelehrten die Arbeit des Vorgängers völlig entgangen sei — eine bei dem bekannten intimen Verhältniss Peurbach's und Regiomontan's unwahrscheinliche Vermuthung.

Auch die berühmten „*Tabulae directionum*"[43]) geben die Sinus für den Halbmesser 600000. Aber mit der Einführung einer neuen goniometrischen Funktion, der Tangente*), welche

*) Die Erfindung der Tangente als selbstständige goniometrische Funktion gehört bekanntlich nicht Regiomontan, sondern seinem Lehrer Peurbach, in gewissem Sinne sogar den Arabern an. Aeusserst merkwürdig ist in dieser Beziehung das Werk von Suter, welches die erste Erfindung dieser Grössen zweimal vor sich gehen lässt, indem Regiomontan einmal als wirklicher Erfinder figurirt[44]), das anderemal nur als Erneuerer einer altbekannten Sache erscheint[45]). Mit Recht hat die Rezension von Stern[46]) auf die Sonderbarkeit dieser Behauptung hingewiesen.

Vorläufer des Columbus, Zeitschrift für Mathematik und Physyk. 19. Jahrg. Literaturzeitung. Seite 49. 41) *Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis, item compositio tabularum sinuum per Ioannem de Regiomonte. Adiectae sunt tabulae sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Omnia nunc primum in utilitatem astronomiae edita*, Norimbergae 1514. 42) *Kästner*, 1. Band. S. 540 ff. 43) *Curtze*, *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrg. S. 453. 44) *Suter*, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, 1. Theil, Zürich 1873. S. 155. 45) *Ibid.* S. 132. 46) *Stern*, Rezension hierzu, Gött. gel. Anz. 1873. S. 1982.

Regiomontan in seiner „*tabula foecunda*“ vollzieht, scheint er sich auch von allen Reminiszenzen emanzipirt zu haben[47]); denn von jetzt ab finden wir den Sinus totus 100000 und die rein dezimale Bruchtheilung. Dieselbe ist von da ab als völlig eingebürgert zu betrachten und wird von allen späteren Autoren über Trigonometrie, von Apian dem Aelteren, Copernicus, Rheticus etc. als selbstverständlich adoptirt. Nicht als ob die sexagesimale Theilung mit Einem Schlage verschwunden wäre. Denn dieselbe zieht sich in einzelnen Spuren bis ins siebzehnte Jahrhundert herein, und noch im Jahre 1668 erschien ein dieselbe ausdrücklich berücksichtigendes Werk[48]), aber ihre Herrschaft ist gebrochen, und auch in den nicht mit der Trigonometrie in direkter Beziehung stehenden Zweigen der Mathematik tritt sie seit Regiomontan's Epoche zurück.

§. 13. Es kann selbstverständlich nicht in unserer Absicht liegen, eine vollständige Geschichte der Dezimalbruchrechnung hier zu geben, denn gerade die für die Praxis wichtigeren Untersuchungen über die Genauigkeit unvollständiger Dezimalbrüche etc. haben mit der Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen an sich nur geringen Zusammenhang. Anders freilich verhält es sich mit der Frage der Periodizität, denn offenbar steht die allgemeine Untersuchung über aufsteigende periodische Kettenbrüche mit derjenigen über absteigende von gleichem Charakter auf derselben Stufe. Wir möchten sogar behaupten, dass durch die bekannten Methoden der Ueberführung von aufsteigenden in absteigende Kettenbrüche der eigentliche Schlüssel zur Behandlung der periodischen Dezimalbrüche an die Hand gegeben sei, deren Theorie bekanntlich noch nicht soweit gefördert ist, als man an und für sich erwarten dürfte. Da nun diese Frage selbst in unseren Tagen noch in keiner Weise für abgeschlossen gelten kann, so verzichten wir auf ihre geschichtliche Darstellung und beschränken uns auf die eigentliche Erfindungsgeschichte der zehntheiligen Brüche.

Der erste Mathematiker, welcher die Dezimalbrüche ausserhalb der Trigonometrie anwendet, ist Cardanus; ja Cantor glaubte sogar ihm die erste Verwendung derselben für Wurzelausziehungen zuschreiben zu müssen[49]), ehe es ihm gelang,

47) *Kästner*, 1. Band. S. 557. 48) *Wing*, *Astronomia Britannica*, Londini 1668, Lib. I. 49) *Cantor*, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hiero-

in Johannes Hispalensis den ersten Erfinder nachzuweisen. Cardan bedient sich der Dezimalbrüche[50]) ganz in der Weise, wie wir dies noch heute thun. Wir führen als charakteristisch folgende Stelle des Cardan'schen Werkes an, welche auch Cantor (s. o.) namhaft macht. *„Est et alius quaerendi quadratam et cubicam modus cum approximatione in una operatione tantum valde bonus ac praecisus, quo ego utor, et est ut in quadrata addas numero totiens* 00 *quotiens volueris invenire praecisionem propinquiorem, veluti si addideris* 00 *habebis praecisionem ad* $\frac{1}{10}$, *si addideris* 0000 *habebis praecisionem in* $\frac{1}{100}$ *et ita semper in dimidio nullitatum additarum"*.

Cardan's Methode scheint selbst bei seinen eigenen Landsleuten keine rasche Aufnahme gefunden zu haben; es wäre ausserdem gewiss wenigstens in dem Werke Cataldi's eine Hinweisung darauf enthalten, welches ausschliesslich der Lehre von der Wurzelausziehung gewidmet ist[51]). Cataldi ignorirt Cardan's Methode, obwohl dieselbe den beiden von ihm gelehrten — so ingeniös dieselben auch an sich unzweifelhaft sind — praktisch vorzuziehen ist.

Anmerkung. Wir benutzen diese Gelegenheit, um eine Lücke in unserer mehrfach zitirten Arbeit über die Geschichte der Kettenbrüche auszufüllen. Wir haben daselbst Cataldi's erste Methode einer eingehenderen Diskussion nicht unterzogen, da ein direkter Zusammenhang derselben mit den kontinuirlichen Brüchen nicht vorzuliegen schien. Indess ist ein solcher in der That vorhanden. Die Näherungsmethode selbst ist diese: Ist a_1 ein erster angenäherter Werth von $\sqrt{m}$, so gilt ein gleiches auch in sukzessive höherem Grade für

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{m}{a_1}\right), \quad a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{m}{a_2}\right), \quad a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{m}{a_3}\right) \cdots$$

Es legte sich nun Fürst Boncompagni[52]) die Frage vor, ob vielleicht jedes solches a_p mit einem bestimmten Näherungsbruche der bekannten Kettenbruchentwickelung

---

nymus Cardanus, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2. Jahrg. S. 373. 50) *Cardanus, Practica arithmeticae generalis*, Mediolani 1539. 51) *Cataldi, Trattato del modo brevissimo di trovare la Radice quadra delli numeri, et Regole da approssimarsi di continuo al vero nelle Radici de' numeri non quadrati, con le cause, et inventioni loro, et anco il modo di pigliarne la Radice cuba applicando il tutto alle operationi militari*, Bologna 1613. 52) *Boncompagni, Question* (1111), Nouv. ann. de mathém. Tome XII.

$$\sqrt{m} \equiv \sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \frac{r}{2a_1} + \frac{r}{2a_1} + \cdots$$

übereinstimme. Diese Frage ward von Moret-Blanc[53]) vermittelst eines eleganten jedoch nicht ganz direkten Kalküls in bejahendem Sinne entschieden; kürzer lässt sich dies, wie an einem anderen Orte[54]) gezeigt wurde, durch folgende Betrachtung darthun, welche hier des Zusammenhanges halber eine Stelle finden möge.

Der $n$te Näherungswerth des obigen Kettenbruchs ist bekanntlich gleich

$$\sqrt{a_1^2 + r}\,\frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^n + (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^n}{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^n - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^n}.$$

Soll also etwa der $x$te Näherungswerth der zweiten Entwickelung dem $y$ten der ersten gleich sein, so muss die Identität

$$m\,\frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^x + (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^x}{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^x - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[m\,\frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^y - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^y}{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^y + (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^y}\right.$$

$$\left. + \frac{m^2}{m} \cdot \frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^y + (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^y}{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^y - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^y}\right]$$

bestehen. Dividirt man beiderseits mit m, so folgt

$$\frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^x - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^x}{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^x - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^x}$$

$$= \frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^{2y} - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^{2y}}{(a_1 + \sqrt{a_1^2 + r})^{2y} - (a_1 - \sqrt{a_1^2 + r})^{2y}},$$

d. h. es ist

$$x = 2y.$$

Bezeichnet sonach k_p den $p$ten Näherungswerth des Kettenbruches, so ergiebt sich

$$a_1 = k_1, \quad a_2 = k_2, \quad a_3 = k_4, \quad a_4 = k_8 \ldots a_m = k_{2^m - 1}.$$

---

53) *Moret-Blanc*, *Solution de la question* 1111, *proposée dans les nouvelles annales de mathématique*, ibid. Tome XII. 54) *Günther*, Vergleichung zweier Methoden zur näherungsweisen Bestimmung irrationaler Grössen, Sitzungsber. d. Erl. med.-phys. Sozietät, 6. Heft. S. 82 ff.

Der innige Zusammenhang beider Methoden ist hierdurch festgelegt.

Das hier in Rede stehende Approximationsverfahren, welches wir, da von neueren Gelehrten besonders Bertrand[55]) darauf Rücksicht nahm, das Bertrand'sche nannten, scheint sein Dasein dem in mehrfacher Hinsicht berühmten Italiener Pacioli[56]) zu verdanken, wie in jener Abhandlung auf Kästner's[57]) Autorität hin angeführt wurde. Die Stelle dieses Werkes[58]) überschrieben

„*De aproximatione* ℞. *in surdis ar.*"

hat Boncompagni[59]) *in extenso* abdrucken lassen. Aber ausserdem findet man dasselbe Rechnungsverfahren auch noch in einer Handschrift des Vatikan. Boncompagni hatte in dieser Angelegenheit eine bekannte Autorität, nämlich Woepcke, beigezogen, welcher das gegenseitige Verhältniss der Quellen eingehend studirte und nachwies, dass die Methode des Vatikanischen Manuskriptes No. 3129, die des Lucas Pacioli und die erste des Cataldi im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommen[60]). Dürfte man, hierdurch geleitet, vielleicht annehmen, Cataldi sei auf diese Idee erst gekommen, nachdem er seine zweite Methode, die Umformung der Quadratwurzel in einen Kettenbruch, bereits besessen, oder mit anderen Worten, können wir bereits bei Cataldi die Kenntniss dieses Zusammenhanges voraussetzen? Jedenfalls ist es eigenthümlich genug, dass man erst 300 Jahre nach der Zeit eines Mannes, der beide Theorien kannte und in dem nämlichen Werke darstellte, auf die Verwandtschaft beider aufmerksam ward; noch Grunert[61]), welcher mit bekannter Aufmerksamkeit beide Operationen behandelte, scheint einen Zusammenhang nicht vermuthet zu haben.

§. 14. Ziemlich zur nämlichen Zeit wie Cardanus bediente sich der Engländer Buckley der Dezimalbrüche zum gleichen Zwecke wie ersterer. Kästner[62]) berichtet von ihm: „Wilhelm Buckley, der zu Eduard VI. Zeit lebte, und

---

55) *Bertrand, Traité d'arithmétique*, Paris 1867. S. 245. 56) *Lucas de Burgo Sancti Sepulchri, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalità*, Venetia 1494. 57) *Kästner*, 1. Band. S. 68. 58) *Lucas de Burgo*, S. 46. 59) *Boncompagni, Intorno ad un metodo per la determinazione approssimativa degl'irrazionali di secondo grado brano di lettera del Dr. F. Woepcke a D. B. Boncompagni*, Bull. di bibl. e di storia etc. Tomo VII. S. 255 ff. 60) *Ibid.* S. 255, 256. 61) *Grunert*, Ueber zwei besondere Methoden der Ausziehung der Quadratwurzel, mit besonderer Rücksicht auf die Verdienste des italienischen Mathematikers Pietro Antonio Cataldi, wahrscheinlich des ersten Erfinders der Kettenbrüche, Arch. d. Math. u. Phys. 30. Theil S. 275 ff. 62) *Kästner*, 1. Band. S. 48.

um 1550 gestorben sein mag, hat eine *Arithmeticam memorativam* hinterlassen, die Wallis bei Setoni Logica, Cambridge 1631 fand, der nicht weiss, ob sie eher erschienen ist. Sie ist in lateinischen Versen verfasst, folgende, für Ausziehung durch Näherung:

Quadrato numero senas praefigito ciphras
Producti quadri radix per mille secetur.
Integra dat Quotiens, et pars ita recta manebit
Radici ut verae, ne pars millesima desit".

Diess ist allerdings ganz das Cardan'sche Verfahren, und es ist deshalb nicht gerechtfertigt, wenn in den Angaben der Historiker über die Fortschritte der Dezimalbruchrechnung zwischen Cardan und Stevin eine Lücke erscheint.

Simon Stevin von Brügge, der Entdecker des hydrostatischen Paradoxons, ist es, dem die Lehre von den zehntheiligen Brüchen die erste zusammenhängende Darstellung verdankt. Quetelet[63]), der seinem berühmten Landsmann einen Ehrenplatz in seinem bekannten Werke einräumt, unterscheidet mit Recht eine „erste" und eine „zweite Erfindung" bei jeder wissenschaftlichen Neuerung von Belang. Als ersten Erfinder der Dezimalbrüche glaubt Quetelet den Stevin nicht bezeichnen zu dürfen, wohl aber als zweiten, und hiermit hat er Allem nach, was wir bisher kennen lernten, das Richtige getroffen.

Um welche Zeit Stevin sich mit dieser Materie zu beschäftigen anfing, ist wohl nicht genau festzustellen, denn wir kennen seine Leistungen blos aus der Gesammtausgabe seiner Werke, welche seinen Schüler Albert Girard (vgl. Kap. I.) zum Herausgeber hat, jedoch wurde ein Theil bereits 1585 publizirt; der davon handelnde Traktat ist überschrieben „*La disme*" und beginnt mit einer warmen Anpreisung der dezimalen Theilung überhaupt. Stevin legt darin Gedanken über ein allgemeines dezimales Mass-, Münzen- und Gewichtssystem nieder, die seit den Tagen der französischen Republik immer mehr ihrer Realisirung entgegengehen.

Die Dezimalbruchrechnung wandte Stevin, wie Quetelet[64]) sich ausdrückt, „*à toutes les opérations de l'arithmétique*

63) *Quetelet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Bruxelles 1871. S. 144 ff. S. 156. 64) *Ibid.* S. 158.

usuelle" an, jedoch fehlte es ihm noch sehr an einer passenden Bezeichnung. Die einfache Manier, den Uebergang von den positiven zu den negativen Potenzen von 10 durch ein dazwischen gesetztes Komma, den sogenannten Einerstrich, anzudeuten, stand ihm noch nicht zu Gebote; er liess vielmehr dessen Stelle durch eine Null vertreten. Jeder Koëffizient einer weiteren negativen Potenz von 10 erhielt den betreffenden Exponenten beigeschrieben, so dass z. B. unser Dezimalbruch 64,8915 durch das Symbol

① ② ③ ④
6 4 0 8 9 1 5

gegeben werden müsste. So wenig förderlich diese uneigentlichen Exponenten für die Praxis auch sein mochten, so ist doch auf der anderen Seite auch nicht in Abrede zu stellen, dass in denselben der Keim zu einem wichtigen Fortschritte lag. Stevin gilt bekanntlich als der eigentliche Erfinder unserer heutigen Potenzbezeichnung, wie er denn auch zuerst gebrochene Potenzen in dieser Weise darstellte. Freilich kann er auch hier, streng genommen, nur als Nacherfinder gelten, denn solche Exponenten kommen bereits im 14. Jahrhundert bei Nicole Oresme[65]) vor.

Das Symbol ① hiess Prime, ② Sekunde etc., und diese Bezeichnungsweise wurde nach Kästner[66]), besonders in der praktischen Geometrie, noch lange beibehalten. Von Stevin hatten wahrscheinlich die niederländischen Geometer Adrianus Romanus und Ludolph van Ceulen gelernt, welche in ihren Arbeiten über näherungsweise Kreisquadratur sich mit den Dezimalbrüchen vertraut zeigen.

§. 15. Seit Stevin begann die Dezimalbruchrechnung eine allgemeine Verbreitung zu finden. Wir nennen deshalb nur noch einige Bücher, welche diesem Kapitel speziell gewidmet sind; die genaue Zusammenstellung dieser Literatur verdanken wir Kästner[67]), dessen ausgedehnte Bücherkenntniss ihm hier zu statten kam. Vor Allem ist es die Arithmetik

65) *Curtze*, Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme, Berlin 1870. S. 8. 66) *Kästner*, 3. Band. S. 395. 67) *Ibid.* 3. Band. S. 5 ff.

von Recorde[68]), ein auch sonst für die Entwickelung der mathematischen Formelsprache nicht unwichtiges Werk[69]). Ferner Wingate's Rechenkunst[70]), welche sich ausführlich mit Dezimalbrüchen befasst und u. a. auch die zur Interesse-Rechnung dienenden Tabellen in Dezimalbrüchen giebt, was allerdings bereits Stevin gethan hatte. Auch Beyer's Werk[71]) gehört hierher.

Nur eines wichtigen Momentes in der Geschichte der Dezimalbruchrechnung glauben wir noch besonders gedenken zu müssen; wir meinen die Erfindung der abgekürzten Multiplikation durch Praetorius. Die mathematischen Verdienste dieses Mannes sind bekannt, gehören aber sonst ganz dem Gebiete der Geometrie an, wie man aus der eingehenden Darlegung von Chasles[72]) ersehen mag. Durch die praktische Geometrie sah er sich auf die Dezimalbrüche hingeführt und erkannte, dass man der weitläufigen Multiplikation zweier solcher Brüche ein abkürzendes Verfahren substituiren könne, ohne doch die Genauigkeitsgrenze zu verlassen. Er theilte seine Idee dem Kanzler Herwart v. Hohenburg mit, dessen mathematische Arbeiten sich hauptsächlich auf die Vereinfachung numerischer Rechnungen bezogen — man erinnere sich an seine Multiplikationstabellen — und der natürlich den Werth der neuen Erfindung wohl zu schätzen wusste. Er theilte dieselbe seinem Freunde und Correspondenten Kepler brieflich mit[73]), und dieser übersah ebenfalls sofort ihre Vortheile. *„Calculum Praetorii"* — schreibt er an Herwart[74]) — *„in magni beneficii loco habeo, quis dua obliquangulorum sphaericorum formas singulis operationibus solvere exemplo docet"*. Bald fand sich auch eine schöne Gelegenheit, dieses Urtheil praktisch zu bethätigen. Landgraf Philipp von Hessen hatte Kepler

---

68) *Record's Arithmetick, or the ground of arts, teaching the perfect Work and Practice of Arithmetick, both in whole numbers and Fractions, after a more easie and exact form than in former time hath been set forth*, London 1673. (2. Ausgabe.) 69) *Baltzer*, Die Elemente der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1865. S. 66. 70) *Wingate's arithmetick, containing a plain method for attaining the knowledge and practice of common arithmetick, improved by John Kersey*, London 1660. 71) *Beyer, Logistica decimalis*, Frankfurt 1619. 72) *Chasles*, Gesch. der Geometrie, deutsch von Sohnke, Halle 1839. S. 497 ff. 73) *Kepleri Opera omnia, ed Frisch*, Vol. II. 74) *Ibid.*

von der Schwierigkeit der Aufgabe gesprochen, die für das System der Ekliptik gegebenen Koordinaten eines Sternes auf den Aequator zu übertragen, indem dabei besonders mühsame Multiplikationen und Divisionen von Dezimalbrüchen erforderlich seien[75]). Dem widerspricht Kepler[76]). „So bedarf es sich auch nit, dass man die *multiplicationes* und *divisiones* gantz aussmacht, sondern des *Praetorii* Weise, ist sicher und gut, das ich anfahe mit dem ersten *digito Multiplicationis ad sinistram, qui ducatur in multiplicandum totum.* Darnach *secundus illius ad sinistram ducatur in hunc non totum, sed demtâ ejus ultima figura ad dextram, et factum subscribatur, ut in margine apparet.* Also auch mit dem Dividiren. Dan was also abgeschnitten würt, da gibt im quotienten mit über 2 oder 3 *Unitates* Verfählung *in digito ultimo ad dextram.* Kan sich also der Calculator verlassen, dass alle vorhergehende *digiti* gerecht". Die Rechnung selbst ist diese:

4062051	4727487	
1163818	4755763	
4062051	42801866	9
406205	4473004	9
243723	4280187	
12186	192817	4
3250	190230	
40	2587	05
32	2378	
4727487	209	4
	190	
	19	4
	19	

Ist hier auch nicht von Dezimalbrüchen, sondern von ganzen Zahlen die Rede, so leidet es doch keinen Zweifel, dass die Rechnung ebenso geführt werden konnte, wenn solche vorlagen. Interessant ist auch Kepler's Versuch, die erreichte Genauigkeit in Theilen der letzten Ziffer abzuschätzen.

Diese hochwichtige Stelle blieb bis in die neueste Zeit in Kepler's Papieren verborgen; wir verdanken ihre Kenntniss

75) *Ibid.* 76) *Ibid.*

dem Herausgeber der Kepler'schen Werke, welcher den hierauf und auf die Logarithmen bezüglichen Theil des Briefwechsels bekannt machte[77]).

§. 16. Wir wollen uns nunmehr zur Geschichte des allgemeinen aufsteigenden Kettenbruches zurückwenden. Der ganze Zeitraum zwischen dem 13ten und 18ten Jahrhundert liefert uns kein Material; wir müssten denn der sogenannten „wälschen Praktik" erwähnen. Mit diesem Namen belegten die deutschen Rechenmeister, wie Lemkes[78]) richtig bemerkt hat, den Kunstgriff, einen beliebigen Bruch in einen aufsteigenden Kettenbruch von zwei oder mehr Theilbrüchen zu verwandeln, welch letztere dann eine sehr einfache Form haben mussten. So ist z. B. nach wälscher Praktik

$$\frac{8}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}.$$

Zwar muss bemerkt werden, dass man unter wälscher Praktik auch noch andere ähnliche Kunstgriffe versteht, wie diess die Rechenbücher von Simon Jacob[79]), Schleupner[80]) u. a. beweisen, der reine Begriff bleibt aber der genannte.

Der erste Mathematiker, welcher aus eigener Initiative die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen wieder aufnahm, ist Lagrange. Seine hierauf bezügliche Abhandlung scheint sich jedoch der Beachtung der Mathematiker gänzlich entzogen zu haben, und wir glauben deshalb nichts Ueberflüssiges zu thun, wenn wir eine ausführliche Analyse derselben hier mittheilen. Vielleicht mag der anscheinend ganz elementare Charakter fraglicher Arbeit[81]) den Grund zu dieser Vernachlässigung gegeben haben; verdient hat sie eine solche, wie wir zeigen werden, in keiner Weise.

§. 17. Das Fundamentalproblem, dessen weitere Diskussion

---

77) *Frisch*, Ueber Kepler's Logarithmen und einige Briefe von Kepler, Archiv d. Math. u. Phys. 24. Theil. S. 296. 78) *Lemkes, Theoria fractionum continuarum ascendentium*, Monasterii 1870. S. 15. 79) *Simon Jacob von Coburg*, Ein new unde wol gegründt Rechenbuch auff den Linien und Ziffern, sampt der Welschen Praktik und allerley vortheilen, Frankfurt am Mayn 1565. 80) *Schleupner*, Der Deutschen und Welschen sowohl der gantzen Welt Praktika Rechnung, Bresslau 1586. 81) *Lagrange, Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions*, Journ. de l'école polytechn. Cahier V. S. 93 ff.

zu den aufsteigenden Kettenbrüchen führt, ist folgendes: Gegeben sei ein Bruch, der in reduzirter Gestalt gleich

$$\frac{B}{A}$$

ist. Es soll ein anderer jenem gleicher Bruch $\frac{m}{a}$ gefunden werden, was natürlich nur annäherungsweise möglich ist; um eine solche Näherung zu erreichen, muss die Differenz beider Brüche, d. h. der Ausdruck

$$\frac{Ba - Am}{Aa} = \frac{\pm C}{Aa}$$

einen möglichst kleinen Werth bekommen. Je nachdem C positiv oder negativ ist, wird der Vorgang der Division mit einem besonderen Wort bezeichnet[82]). *„On peut, pour plus de simplicité, appeler division „en dedans" celle où le reste est positif, et „division en dehors" celle qui donne un reste négatif; parce qu'en effet, dans la première, le produit du quotient par le diviseur tombe en dedans du dividende, et que, dans la seconde, il tombe en dehors."*

So findet man

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{C}{Aa},$$

und wenn $Cb - An = \pm D$, $DC - Ap = \pm E$ gesetzt wird,

$$\frac{C}{A} = \frac{n}{b} \pm \frac{D}{Ab},$$

$$\frac{D}{A} = \frac{p}{c} \pm \frac{E}{Ac}.$$

Die Zusammensetzung dieser Ausdrücke liefert

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{ab} \pm \frac{p}{abc} \pm \frac{E}{Aabc}.$$

Wie in dieser Weise fortzuschreiten ist, liegt am Tage. Für $a = b = c$ etc. fliesst hieraus

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{a^2} \pm \frac{p}{a^3} \pm \cdots$$

Als Beispiele solcher Reihen werden die für e^x, $\sin x$, $\cos x$ namhaft gemacht.

82) *Lagrange*, S. 94.

Es wird dann weiter $m = n = p = \cdots = 1$ gesetzt und gezeigt, wie man jeden ächten Bruch in eine solche Reihe verwandeln kann, die nach Druckenmüller (s. §. 20.) als „Kettenreihe" vom Zähler 1, nach Heis (s. §. 21.) als „Theilbruchreihe" zu bezeichnen wäre. Die von Lagrange hierzu angegebene Regel kann folgendermassen formulirt werden:

Soll ein ächter Bruch in eine Theilbruchreihe verwandelt werden, so dividire man mit dem Zähler in den Nenner, mit dem Rest wieder in den Nenner u. s. f.; die hierbei sich ergebenden Quotienten sind successive gleich a, b, c etc.

So findet Lagrange, von der auf 26 Stellen berechneten Ludolf'schen Zahl ausgehend, für π den Ausdruck[83]):

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739} + \frac{1}{7.113.4739.47051} + \frac{1}{7.113.4739.47051.499762} - \cdots$$

Die beiden ersten Glieder ergeben das Verhältniss des Archimedes, die drei ersten dasjenige des Metius,*) und die Konvergenz ist eine sehr rasche.

§. 18. Nunmehr wendet sich Lagrange einer anderen Aufgabe zu, die er mit folgenden Worten[85]) definirt: „*Dans les problèmes précédens, il a été question de réduire une fraction donnée à d'autres fractions dont les numérateurs étaient donnés; mais on peut chercher simplement à réduire une fraction à d'autres fractions exprimées en moindres termes, et qui soient les plus approchantes qu'il est possible de la fraction donnée*". Wir ersehen hieraus:

Bei Lagrange findet sich zuerst der Begriff der Näherungswerthe von aufsteigenden Kettenbrüchen.

Bleiben wir beim ersten Näherungsbruche stehen, so muss zunächst die diophantische Gleichung**)

---

*) Für die Erfindungsgeschichte dieses Näherungswerthes kann man eine lesenswerthe Abhandlung von Glaisher[84]) vergleichen, welche sich über verschiedene historisch wichtige Punkte in der Lehre von der Kreisquadratur verbreitet.

**) Wir haben oben das Wort „diophantische Gleichung" im gewöhnlichen Sinne genommen. Streng richtig ist diese Bezeichnung allerdings nicht, da Diophant auf ganzzahlige Auflösungen gar kein Gewicht legte,

---

83) *Ibid.* S. 100. 84) *Glaisher, On the Quadrature of the Circle, A. D. 1580—1630*, The Messenger of Mathematics, 1873. S. 27 ff. 85) *Lagrange*, S. 101.

$$Ba - Am = \mp 1$$

ganzzahlig aufgelöst werden. Hierzu kommen dann bei weiterem Fortschreiten die Gleichungen

$$mb - an = \mp 1,$$
$$nc - bp = \pm 1 .$$
$$\vdots$$

Ueber dieses System unbestimmter Gleichungen wird nun eine Reihe eleganter Betrachtungen angestellt und es findet sich als Schlussresultat

$$n = B - \lambda m,\ p = m - \mu n \cdots b = A - \lambda a,\ c = a - \mu b \cdots,$$

unter λ, $\mu \cdots$ beliebige ganzzahlige Werthe verstanden.

Werden endlich noch Hülfsgrössen eingeführt durch folgende Gleichungen:

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{1}{Aa} = \frac{n}{b} \mp \frac{N}{Ab} = \frac{p}{c} \pm \frac{P}{Ac} = \frac{q}{d} \mp \frac{Q}{Ad} \text{ etc.},$$

so kann man, wie Lagrange[86]) beweist, jeden Quotienten zweier in alphabetischer Ordnung aufeinanderfolgender grosser Buchstaben einem einfach gebildeten Kettenbruche gleichsetzen. Grösserer Uebersichtlichkeit halber führen wir die zu Lagrange's Zeit noch wenig ausgebildete Indexbezeichnung ein und setzen statt N, P, Q, R, S etc. allgemein N_1, $N_2 \ldots$, statt λ, μ, ν etc. ν_1, $\nu_2 \ldots$, statt a, b, c etc. a_1, $a_2 \ldots$ und statt m, n, p etc. n_1, $n_2 \ldots$ Dann erhalten wir folgende Kettenbruchentwickelung

$$\frac{N_x}{N_{x-1}} = \nu_x + \frac{1}{\nu_{x-1} + \dfrac{1}{\nu_{x-2} + \dfrac{1}{\nu_{x-3} + \cdots + \dfrac{1}{\nu_1}}}}$$

wo x jede positive ganze Zahl > 1 bedeutet. Nun ist aber jedes dieser ν durch die Theilzähler und Theilnenner des aufsteigenden Kettenbruches, in welchen

$$\frac{B}{A}$$

entwickelt wurde, darstellbar, und man kann somit zum Schluss

und die unbestimmte Analytik der Griechen überhaupt, ganz abweichend von der der Inder, blos die Bestimmung rationaler Werthe verlangte.

86) *Ibid.* S. 111.

den aufsteigenden Kettenbruch in Form eines absteigenden erhalten, dessen Theilzähler und Theilnenner aus denen des ersteren, d. h. aus a_k und n_k, zusammengesetzt sind.

Die Umwandlung eines aufsteigenden in einen absteigenden Kettenbruch ward zuerst, wenn auch nicht in entwickelter Form, von Lagrange geleistet.

Den Schlusspassus der Abhandlung glauben wir seines allgemeinen Interesses halber wörtlich hier anführen zu sollen[87]): *„Nous avons considéré le problème de la réduction de fractions, à d'autres plus simples, d'une manière générale, et nous avons dérivé d'un même principe la théorie des fractions décimales, considérée dans un système quelconque de numération, la théorie d'une autre espèce de fractions peu connues, que feu Lambert a, je crois, proposées le premier, et qui ont l'avantage singulier de former de suites plus convergentes qu'aucune série géométrique; enfin la théorie des fractions continues, qui avait toujours été traité jusqu'ici d'une manière isolée. Le seul objet de cet écrit a été de montrer comment ces différentes théorie pouvaient être rapprochées et présentées sous un même point de vue“.*

Wäre Lagrange's Hinweisung auf eine sachgemässe Behandlung der Lehre von den Dezimalbrüchen besser gewürdigt worden, so wäre unsere oben gemachte Aeusserung (s. §. 1.) nicht zutreffend; leider theilte jedoch diese Andeutung das Schicksal der ganzen Studie, dessen wir bereits gedachten.

§. 19. Wie aus dem Obigen hervorgeht, betrachtete Lagrange nicht sich selbst als den Erfinder der Kettenreihen, bezüglich aufsteigenden Kettenbrüche, sondern führte diese Erfindung auf Lambert zurück. Da er eine Quelle durchaus nicht namhaft macht, so schien es zuerst nicht leicht, seine Angabe zu verifiziren — ist doch die Anzahl der von Lambert theils selbstständig, theils in Journalen veröffentlichten Arbeiten bekanntermassen eine überaus grosse. Es gelang jedoch, die betreffenden Stellen auszumitteln, und es fand sich, dass der deutsche Mathematiker den Gegenstand nicht blos vorübergehend berührt, sondern einer ausführlichen Untersuchung unterworfen hat, welche ganz wie die seines berühmten Nachfolgers der Vergessenheit anheimfiel. In den uns zugänglichen Arbeiten vermochten wir wenigstens keine Andeutung

87) *Ibid.* S. 114.

zu entdecken, dass deren Verfasser von jenen Studien Kenntniss genommen hatten.

Lambert's Aufsatz beschäftigt sich mit einem allgemeinen Gegenstande[88]), nämlich um es kurz zu sagen, mit dem Problem der Näherungswerthe im grössten Massstabe. Die Analogie zwischen seiner Arbeit und der von uns oben analysirten Lagrange's tritt hiernach deutlich hervor; während aber Lagrange von den aufsteigenden Kettenbrüchen zu den absteigenden fortschreitet und dabei stets deren gegenseitigen Zusammenhang im Auge behält, ist der Untersuchungsgang Lambert's ein umgekehrter, und ein Versuch, jenen Zusammenhang zu ermitteln, wird nicht gemacht. Vom praktischen Standpunkte aus betrachtet, erscheint der Gegenstand bei letzterem ungleich mehr durchgearbeitet, wogegen wieder Lagrange's Essai durch die Eleganz der Behandlung und den universelleren Standpunkt einen höheren theoretischen Werth beanspruchen darf.

Lambert knüpft seine Betrachtung[89]) an das spezielle Zahlenbeispiel der Ludolphine an und entwickelt, allerdings in einer noch ganz empirischen Weise, für π die Reihe

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791} - \frac{1}{3748629} - \frac{1}{443384023362059} - \cdots,$$

welche äusserst schnell konvergirt und in ihren ersten drei Gliedern genau, in den folgenden jedoch nur näherungsweise als Theilbruchreihe angesehen werden kann. Lambert nimmt jedoch von dieser Reihe Gelegenheit, das Problem der Theilbruchreihe selbst anzugreifen.

„Wenn man" — sagt er[90]) — „nicht so genau darauf sieht, dass solche Reihen unter allem am geschwindesten konvergiren, so lassen sich solche finden, die nach gewissen Gesetzen fortgehen. So z. E. es sei die Frage jede Dezimalreihe in eine Reihe von Brüchen von folgender Form

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} + \cdots$$

zu verwandeln, und zwar mit der gedoppelten Bedingung, dass

---

88) *Lambert*, Verwandlung der Brüche, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, 2. Theil, Berlin 1770. S. 54 ff. 89) *Ibid.* S. 102. 90) *Ibid.* S. 104.

a, b, c, d etc. ganze Zahlen seyen, und die Reihe unter allen dieser Art am geschwindesten konvergire".

Als unmittelbarer Beleg, dass dies stets angehe, folgt dann sofort die Entwickelung der Reihe

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739} + \frac{1}{7.113.4739.47051} + \frac{1}{7.113.4739.47051.499762} + \cdots$$

Zum Beweise, dass man sehr verschiedene und sehr verschieden konvergirende Kettenreihen finden könne, folgt die weitere Reihe

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{3.22.118} - \frac{1}{3.22.118.384} + \cdots$$

Die Art und Weise, wie numerische Bruchwerthe in solche Reihen umzusetzen sind, ist ganz die nämliche[91]), welche wir bei Lagrange (s. §. 17.) kennen gelernt haben.

Eine theoretisch wichtige Bemerkung kommt im letzten Paragraphen des von Kettenreihen handelnden Abschnittes vor. Es wird nämlich bemerkt, dass die Bedingung der schnellsten Konvergenz auch fallen gelassen werden könne, und dann heisst es weiter[92]): „Will man von dieser Bedingung abgehen, so kann jeder Bruch und jede Dezimalreihe in unzählige Reihen verwandelt werden, die nach anderen Absichten eingerichtet werden können".

Bei den Kettenbrüchen gewöhnlicher Art ist dies bekanntlich nicht der Fall, und wir erkennen so:

Lambert erkannte der erste den wesentlichen Unterschied zwischen ab- und aufsteigenden Kettenbrüchen, der darin besteht, dass jeder ächte Bruch nur auf eine einzige Art in einen absteigenden Kettenbruch vom Theilzähler 1 verwandelt werden kann, während ihm unendlich viele aufsteigende Kettenbrüche von demselben Charakter gleich sein können.

Die hier erwähnte Grundeigenschaft der absteigenden Kettenbrüche scheint zwar schon früh bemerkt, aber erst verhältnissmässig spät (von Grunert[93])) ganz genügend bewiesen worden zu sein.

---

91) *Ibid.* S. 109. 92) *Ibid.* S. 111. 93) *Grunert*, Mathematische Abhandlungen, 1. Sammlung, Altona 1822. S. 136 ff.

§. 20. Der Begriff der Kettenreihen (aufsteigenden Kettenbrüche von beliebigem Partialzähler) war von Lagrange, jener der Theilbruchreihen (Partialzähler = 1) von Lambert in die Wissenschaft eingeführt worden. Aber, wie wir bereits sahen, nahm man keine Notiz von diesen Arbeiten und es vergiengen wieder vierzig Jahre, bis sich ein Fortschritt in dieser Angelegenheit manifestirte. Das Verdienst, diesen Fortschritt herbeigeführt zu haben, gebührt einem deutschen Gelehrten, dem auch auf dem Gebiete der analytischen Geometrie vielfach verdienten Druckenmüller, welcher dem Gegenstande ein eigenes Werk widmete[94])*).

Eine Kettenreihe ist allgemein eine (endliche oder unendliche) Reihe von der Form

$$\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_1 a_2} + \frac{m_3}{a_1 a_2 a_3} + \cdots,$$

bezüglich ein aufsteigender Kettenbruch

$$\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \frac{m_3}{a_3} + \cdots$$

spezieller versteht man (wie z. B. Matthiessen[95])) darunter den Fall $a_1 = a_2 = \cdots a$. Im letzteren Sinne gehören zu den Kettenreihen die Dezimalbrüche, so ist

$$0{,}3478 = \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{8}{10^4}$$

eine solche.

Bleiben wir bei diesen Kettenreihen noch einen Augenblick stehen. Kettenreihen, in deren Zählern irgendwelche Periodizität obwaltet, können summirt werden, d. h. es lässt sich für dieselben der Werth, welche sie als konvergirende

*) Der Verf. sieht sich genöthigt, an dieser Stelle sein lebhaftes Bedauern darüber auszusprechen, dass es ihm nicht möglich war, die leider so wenig bekannte Arbeit Druckenmüller's selbst in Augenschein zu nehmen. Es blieb ihm nur übrig, ein kurzes Resumé über dieselbe nach den in anderen Werken sich vorfindenden Notizen zusammenzustellen.

94) *Druckenmüller*, Theorie der Kettenreihen und ihre Anwendung. Trier 1837. 95) *Matthiessen*, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Dr. Eduard Heis, 2. Band. Köln und Wien 1873. S. 142.

Reihen nothwendig besitzen müssen, independent angeben. Hat man ganz allgemein die periodische Kettenreihe

$$\Sigma = \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdots + \frac{m_{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{m_n}{a^n} + \frac{m_1}{a^{n+1}} + \frac{m_2}{a^{n+2}} + \cdots,$$

deren Periode sich dadurch bestimmt, dass man allgemein dem Nenner

$$a^{qn+r} \text{ den Zähler } m_r$$

entsprechen lässt ($q \geq 1$, $r \geq 1 \leq n$), so findet man durch Zusammenfassen von je n Gliedern

$$\Sigma = \frac{m_1 a^{n-1} + m_2 a^{n-2} + \cdots + m_{n-1} a}{a^n} + \frac{m_n}{a^n}\left(1 + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{2n}} + \cdots\right),$$

und durch Summirung der in Klammer stehenden geometrischen Reihe

$$\Sigma = \frac{m_1 a^{n-1} + m_2 a^{n-2} \ldots + m_{n-1} a + m_n}{a^n - 1}.$$

Matthiessen handelt ausführlich von der Verwandlung gemeiner Brüche in Kettenreihen und beweist bei dieser Gelegenheit nachstehenden interessanten Lehrsatz[96]):

„Wenn Nenner und Zähler eines Bruches zur Basis Primzahlen sind, so bilden die Zähler der Kettenreihe eine Periode, die gleich zu Anfang beginnt“.

Auch zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades können die Kettenreihen verwandt werden, wie Druckenmüller gezeigt hat; indess bietet diese Methode nach Matthiessen's[97]) Urtheil vor anderen bekannten Verfahrungsweisen keinen wesentlichen Vortheil.

§. 21. Wir haben uns im Vorstehenden bereits vielfach des Titels „aufsteigender Kettenbruch“ an Orten bedient, wo der Autor selbst nur von Kettenreihen und Aehnlichem sprach. Die scheinbar so naheliegende Idee, das Theilungsprinzip, welchem der gewöhnliche Kettenbruch seine Entstehung verdankt, vom Nenner auf den Zähler zu übertragen, blieb verborgen, bis Kunze die Identität solcher Formen mit den Kettenreihen bemerkte und für erstere den gut gewählten Namen „aufsteigende Kettenbrüche“ in Vorschlag brachte[98]). Diese

96) *Ibid.* S. 143. 97) *Ibid.* S. 145. 98) *Kunze*, Die aufsteigenden Kettenbrüche, eine Zugabe zu allen Lehrbüchern der Arithmetik. Weimar 1857.

Terminologie entspricht ganz derjenigen, welche wir für die nämlichen Gebilde bei Leonardo von Pisa kennen gelernt haben (s. §. 9.); der aufsteigende Kettenbruch hat sein Analogon in den *„fractiones in gradibus“*.

Wir geben hier ein Referat über die in Kunze's Schrift enthaltenen neuen Thatsachen, indem wir uns dabei an die sehr übersichtliche Rezension Cantor's[99]) anschliessen. Es wird zunächst bewiesen, dass ein gewöhnlicher Bruch in unendlich viele verschiedene aufsteigende Kettenbrüche vom Theilzähler 1 verwandelt werden kann — ein Satz, dessen Urheberschaft allerdings auf Lambert (s. §. 19.) zurückgeführt werden müsste.

Beim absteigenden Kettenbruche sind sämmtliche Näherungswerthe so beschaffen, dass zwischen je zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden der wahre Werth enthalten ist, beim aufsteigenden sind sie ohne Ausnahme kleiner als dieser letztere. Ist

$$\frac{p_n}{q_n}$$

der $n$te Näherungswerth eines aufsteigenden Kettenbruches $\frac{A}{B}$, so bestehen die beiden Relationen

$$\frac{A-1}{B} > \frac{p_n}{q_n}$$

$$\frac{p_n+1}{q_n} > \frac{A}{B}.$$

Auch für einzelne Funktionen werden die unendlichen aufsteigenden Kettenbrüche mitgetheilt, in welche dieselben sich entwickeln lassen: so ist

$$\frac{1}{e} = \frac{2}{3} - \frac{5}{4} + \frac{9}{5} - + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2+3+4\cdots+n+n+1)+\cdots}{n+2}$$

Die Kunze'sche Leistung hat ihren Hauptwerth darin, dass sie die Identität der von Lagrange und Druckenmüller in die Wissenschaft eingeführten Kettenreihen mit kontinuirlichen Brüchen darthut, deren Bildungsgesetz dem der gewöhnlichen Kettenbrüche analog ist.

99) *Cantor*, Rezension hierzu, Kritische Zeitschr. f. Chemie, Phys. u. Mathem. Erlangen 1858. S. 378.

Den speziellen Fall der aufsteigenden Kettenbrüche, wo jeder Theilzähler der positiven Einheit gleich ist, hat Heis ausführlich untersucht und deren Nutzen für die Praxis nachgewiesen. Bestimmte und unbestimmte Gleichungen verschiedener Grade können mit ihrer Hülfe aufgelöst werden[100]); überhaupt leisten sie bei allen Approximationsrechnungen gute Dienste.

Wie wir früher (s. §. 18.) festzustellen Gelegenheit hatten, verfiel Lagrange der erste darauf, den Zusammenhang zwischen auf- und absteigenden Kettenbrüchen zu untersuchen. Es gelang ihm allerdings einen solchen aufzustellen; durch die von ihm eingeführten Zwischengrössen trat derselbe jedoch nicht klar zu Tage, und vor allem konnte man daraus nicht erkennen, wie äusserst einfach das Bildungsgesetz des resultirenden absteigenden Kettenbruches ist.

Die jenen Zusammenhang vermittelnde Identität

$$\frac{b_1}{a_1}+\cfrac{b_2}{a_2}+\cfrac{b_3}{a_3}+\cfrac{b_4}{a_4}+\cdots = \frac{b_1}{a_1}-\frac{a_1b_2}{a_2b_1+b_2}-\frac{a_2b_1b_3}{a_3b_2+b_3}-\frac{a_3b_2b_4}{a_1b_3+b_4}\cdots$$

ist zuerst von Schlömilch[101]) *bemerkt worden.*

Vor kurzer Zeit erschien, vermuthlich auf eine Anregung von Heis (s. o.) hin, eine die gesammte Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen behandelnde Inauguraldissertation, welche insofern einem Bedürfniss abhilft, als die betreffende Schrift das ganze bekannte Material übersichtlich zusammenstellt[102]). Auch manches Neue findet sich in derselben, so besonders die Ueberführung von aufsteigenden Kettenbrüchen in Faktorenfolgen u. dgl.

Einen weiteren Fortschritt scheint unsere Disziplin von der Anwendung der Determinantentheorie erwarten zu dürfen. Nachdem die independente Darstellung der aufsteigenden Kettenbrüche durch die Gleichung[103])

100) *Matthiessen*, S. 181 ff. S. 430. 101) *Schlömilch*, Rezension zu Kunze's Schrift, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 3. Jahrgang. Literaturz. S. 63. 102) *Lemke*, *Theoria fractionum continuarum ascendentium*, Monasterii 1870. 103) *Günther*, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 42.

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{vmatrix}}{\prod_{k=1}^{k=n} a_k}$$

gegeben war, ist es relativ leicht geworden, alle Eigenschaften dieser Gebilde durch einfache Transformationen von Determinanten zu entwickeln*).

Noten.

I. Zu §. 3. In jenem Paragraph war davon die Rede, wie sich Hankel und Nesselmann jene bekannte Erscheinung in der Logistik der Griechen zurechtlegten, dass, wenn nur irgend möglich, ja selbst auf Kosten der strengen Genauigkeit, ein komplizirterer Bruch durch eine Summe von Einheitsbrüchen ersetzt wurde. In seiner Rezension zu Hankel's Werk[105]) spricht sich Cantor anerkennend über Hankel's Divinationsgabe aus, erwähnt aber, dass das Verfahren selbst schon von Leonardo Fibonacci angegeben worden ist. Indem wir noch zum Verständniss von Leonardo's Bezeichnung der aufsteigenden Kettenbrüche auf §. 9. verweisen, führen wir eines der von ihm gegebenen Beispiele wörtlich hier an[106]).

„*Est enim in similibus quedam alia universalis regula, scilicet ut invenias numerum, qui habeat in se multas regulas, ut* 12, *vel* 24, *vel* 36, *vel* 48, *vel* 60, *vel quemlibet alium numerum, qui sit major medietati numeri existenti sub uirgula, vel minor duplo ipsius: ut pro prescriptis* $\frac{17}{29}$ *accipiamus* 24, *que sunt plus medietate de* 29; *et multiplica igitur* 17, *que sunt super uirgulam per* 24, *erunt* 408; *que divide per* 29 *et per* 24, *exibunt* $\frac{2}{29}\ \frac{14}{24}$: *deinde vide de* 14, *que partes sunt de* 24: *sunt enim* $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ *vel* $\frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$ **),

*) Eine ganz neuerlich erschienene Arbeit von Mollame[104]) über Kettenreihen haben wir, als wesentlich Neues nicht enthaltend, unberücksichtigt gelassen.

**) Hier sollte eigentlich der Bruchstrich nicht ganz ausgezogen sein, indem sich sonst leicht an Stelle des richtigen Werthes

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{24}$$

104) *Mollame, Expression du rapport entre deux états d'une grandeur (ou de deux grandeurs homogènes) au moyen d'une série*, Periodico di scienze mat. e natur., per l'insegnamento publico, I. S. 86 ff. 105) *Cantor's* Rezension zu Hankel, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. S. 37. 106) *Leonardo Fibonacci, Il liber abbaci.* S. 82.

quas serva pro partibus de $\frac{17}{29}$; *et vide iterum de* 2 *que sunt super* 29, *que partes sint de* 24; *sunt enim* $\frac{1}{12}$ *ipsorum, pro quo habebis* $\frac{1\ 0}{12\ 29}$ *in eisdem partibus de* $\frac{17}{29}$, *quia* $\frac{2}{29}$ *de* $\frac{1}{24}$ *equantur* $\frac{2}{24}$ *de* $\frac{1}{29}$, *que sunt* $\frac{1\ 0}{12\ 29}$, *scilicet* $\frac{1}{348}$: *ergo pro* $\frac{17}{29}$ *habebis* $\frac{1}{348}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$, *ut superius invenimus*".

Wir wollen diese interessante Stelle der Verständlichkeit halber in unsere Schreibweise übertragen. Man bildet, um $\frac{17}{29}$ in „Stammbrüche" zu zerfällen, zuvörderst $17 \cdot 24 = 408$. Dividiren wir zuerst jetzt mit 29 und erst dann mit 24, so resultirt der aufsteigende Kettenbruch

$$\frac{14}{24} + \frac{2}{29} = \frac{14}{24} + \frac{2}{24.29}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{14}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2},$$

und

$$\frac{2}{24.29} = \frac{0}{29} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12.29} = \frac{1}{348},$$

also schliesslich

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{348} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{348} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}.$$

Weitere Bemerkungen bei dieser allerdings sehr verlockenden Gelegenheit anzuknüpfen, enthalten wir uns, da solche von Cantor selbst (s. o.) zu erwarten stehen.

II. Zu §. 9. Zur Entwickelungsgeschichte der für die formale Seite der Mathematik so wichtigen Bezeichnung liefert Leonardo's Schreibweise der aufsteigenden Kettenbrüche insofern einen interessanten Beitrag, als man daraus recht deutlich ersieht, welch' grosse Schwierigkeiten das uns so natürlich Scheinende selbst bedeutenden Männern darbot. In einem eigenthümlichen Gegensatz zu ihm steht Michael Stifel, der die Multiplikation von Brüchen durch Uebereinandersetzen derselben andeutet, ganz so wie beim aufsteigenden Kettenbruch die Theilbrüche an einander gereiht werden, so dass bei oberflächlicher Betrachtung leicht eine Täu-

---

der falsche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{13}{24}$$

einschleichen könnte.

schung möglich wäre. In dem Kapitel „*De Algorithmo Minutiarũ ex alijs Minutijs*“ lautet der Anfang[107]):

„*Minutiae Minutiarum sic repraesentari debent, ut à simplicibus Minutijs possint discerni ut Tres quartae, duarum tertiarum, unius septimae, sic repraesententur.*

$$\frac{1}{\frac{1}{7}}\quad\frac{2}{\frac{2}{3}}\quad\frac{3}{\frac{3}{4}}$$

Idem autem faciunt hae Minutiae Minutiarũ singulae.

$$\frac{2}{\frac{2}{3}}\quad\frac{1}{\frac{1}{7}}\quad\frac{3}{\frac{3}{4}}\qquad\frac{3}{\frac{3}{4}}\quad\frac{1}{\frac{1}{7}}\quad\frac{2}{\frac{2}{3}}\qquad\frac{2}{\frac{2}{3}}\quad\frac{3}{\frac{3}{4}}\quad\frac{1}{\frac{1}{7}}\qquad\frac{1}{\frac{1}{7}}\quad\frac{2}{\frac{2}{3}}\quad\frac{3}{\frac{3}{4}}$$

Patet hoc ex regula reductionis hujus modi Minutiarum, qua videlicet reducuntur ad simplices Minutias“.

III. Zu §. 12. Wie lange das altrömische Bruchsystem sich in schwerem Daseinskampfe erhalten konnte, dafür können wir aus einem Werkchen des 17. Jahrhunderts einen hübschen Beleg beibringen. Der Verfasser, Georg Henisch, giebt darin mit allem gelehrten Pomp eine vollständige Tabelle jener eigenartigen Zahlenschematisirung; wir legen dieselbe[108]) hier in *extenso* bei:

„*Schema partium assis.*“

	Unciae	*Semũ.*	*Drach.*	*Scr.*	*Oboli.*	*Lupin.*	*Semiobol.*	*Sliq.*	*Gr. pip.*	*Grm. hordei.*
As	12	24	96	288	576	864	1152	1728	5760	6912
Decunx	11	22	88	264	528	792	1056	1548	5280	6336
Dextans	10	20	80	240	480	720	960	1440	4800	5760
Dodrans	9	18	72	216	432	648	864	1296	4320	5184
Pes	8	16	64	192	384	576	768	1152	3840	4608
Septunx	7	14	56	168	336	494	672	1008	3360	4032
Senis	6	12	48	144	288	432	576	864	2880	3456
Quincunx	5	10	40	120	240	360	480	720	2400	2880
Triens	4	8	32	96	192	288	384	576	1920	2302
Quadrans	3	6	24	72	144	216	288	432	1440	1728
Sextans	2	4	16	48	96	144	192	288	960	1152
Sescuncia	$1\frac{1}{2}$	3	12	36	72	108	144	216	728	864
Uncia	1	2	8	24	48	72	96	144	480	576
Semuncia	$\frac{1}{2}$	1	4	12	24	36	48	72	240	288
Duella	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	8	16	24	32	48	160	192
Sicilicus	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	6	12	18	24	36	120	144
Sextula	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	4	8	12	16	24	80	96
Drachma	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	3	6	9	12	18	60	72
Semisextula	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	2	4	6	8	12	40	48
Scrupulus	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	1	2	3	4	6	20	24
Obolus	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	10	12
Lupinus	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{1}{3}$	2	$6\frac{2}{3}$	8
Semiobolus	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$	5	6.

107) *M. Stifelius, Arithmetica integra*, Norimbergae 1548. S. 7. 108) *G. Henischius, De asse et partibus ejus*, Augustae Vindelic. 1606. S. 10.

So konnte also noch zu einer so späten Zeit ein deutscher Mathematiker — derselbe genoss damals eines gewissen Rufes und wird uns in der Geschichte der magischen Quadrate wieder begegnen — seinen Lesern eine Methode bieten, deren Unzulänglichkeit längst erkannt, deren alterthümliches Gewand aber immer noch von einem gewissen ehrwürdigen Nimbus umfangen war.

IV. Zu §. 15. Wir hatten uns im Anschluss an die Meinung des berühmten Kepler-Kenners Frisch dafür ausgesprochen, dass der wichtige Fortschritt in der Dezimalbruchrechnung, welchen wir abgekürzte Multiplikation nennen, von Praetorius gemacht worden sei, der dann Kepler davon avisirt habe. Gegen diese Ansicht hat nun neuerlich Wolf, wie wir später sahen, so unabweisbare chronologische Gründe geltend gemacht, dass sie wohl oder übel aufgegeben werden muss. Indess hat sich Wolf[109]) nicht damit begnügt, ein Bestehendes vernichtet zu haben, sondern er weist uns auch die wirkliche Quelle nach, aus der jene Erfindung geflossen. Dieselbe gehört Jobst Bürgi, dem erst jetzt allmälig seinem wahren Werthe nach gewürdigten Toggenburger, dessen Name mit der Erfindung der Logarithmen wie der Pendeluhr gleich untrennbar verbunden ist. Wir schalten die bezügliche Stelle aus Wolf's Essai hier wörtlich ein. Es ist von Bürgi's Berechnung der Vieleckseiten im Kreise die Rede; alsdann heisst es weiter:

„Bürgi giebt nun zunächst eine Anleitung zur Coss oder Algebra, und zwar theils zu den gewöhnlichen algebraischen Operationen, theils aber namentlich auch zu der von ihm muthmasslich unabhängig von Stevin in den Gebrauch eingeführten Dezimalbruchrechnung. Den grössten Sinus setzt er gleich der Einheit, und alle anderen Sinus drückt er, ganz ähnlich wie es in der Neuzeit gebräuchlich ist, in dieser Einheit aus; nur fehlt das Komma, welches er nöthigenfalls durch eine vor- oder untergesetzte Null ersetzt (später scheint Bürgi das Komma ebenfalls benutzt zu haben). So stimmen seine

1414	1414	01414	001414
○			

mit unseren

141,4	1,414	0,1414	0,01414

überein. Auch die abgekürzte Multiplikation kennt und lehrt er in der jetzt noch gebräuchlichen Weise, wie das seiner Schrift entnommene Beispiel

01234	
12358	
01234	
0246	8
037	0
06	1
0	9
01525	

109) *Wolf*, Astronomische Mittheilungen, XXXI. S. 14 ff.

zeigt, — und bei Division oder Wurzelausziehung hängt er dem Dividend oder Radikand, wie wir es zu thun pflegen, nöthigenfalls Nullen an, bei ersterer den noch bis 18. Jahrhundert hinauf (Vergleiche z. B. noch den 1745 von Tobias Mayer veröffentlichten mathematischen Atlas) gebräuchlichen Modus verwendend, bei welchem der Divisor sukzessive unter dem Dividend nach rechts geschoben und das Produkt der jeweilen erhaltenen Stelle des Quotienten mit jeder einzelnen Ziffer des Divisors (von links beginnend) abgezogen wird".

Hierauf bezieht sich auch Kepler in seinem deutschen Archimedes, wenn er sagt[110]): „Weil ich kurtze Zahlen brauche, derhalben es oft Brüche geben wirdt, so mercke, dass alle Ziffer, welche nach dem Zeichen (,) folgen, die gehören zu dem Bruch, als der Zehler, der Nenner dazu wird nicht gesetzt, ist aber allezeit eine runde Zehnerzahl von so vil Nullen, als vil Ziffer nach dem Zeichen kommen. Wann kein Zeichen nicht ist, das ist eine gantze Zahl ohne Bruch, und wann also alle Ziffern nach dem Zeichen gehen, da heben sie bissweilen an von einer Nullen. Diese Art der Bruchrechnung ist von Jost Buergen zu der sinusrechnung erdacht, und ist darzu gut, dass ich den Bruch abkürtzen kann, wo er unnötig lang werden wil, ohne sondern Schaden der übrigen Zahlen; kan ihn auch etwa auff Erhaischung der Notdurfft erlengern. Item lasset sich also die gantze Zahl und der Bruch mit einander durch alle *species arithmeticae* handlen wie nur ein zahl. Als wann ich rechne 365 Gulden mit 6 per cento, wievil bringt es dess Jars Interessen? das stehet nun also:

3,65
6 mal
facit 21,90*)

und bringt 21 Gulden und 90 Hundertheil oder 9 Zehentheil, das ist 54 Kr."

V. Zu §. 16. Ueber die „wälsche Praktik" hat kürzlich Cantor einige bemerkenswerthe Nachweisungen gegeben, indem er an eine Festschrift von Kuckuck anknüpft, welche nur vorübergehend dieses Verfahrens Erwähnung thut[111]). Cantor macht zur Ergänzung folgenden Zusatz[112]). „Sie" — die Praktik — „besteht dem Gedanken nach in einer Zerlegung eines gebrochenen Multiplikators in eine Summe von sogenannten Stammbrüchen, d. h. von Brüchen mit Einheitszählern, wodurch die Multiplikation in leichte Divisionen und eine nachfolgende Addition umgesetzt wird, ein Verfahren, welches die Geschichte der Rechenkunst als das älteste bei Bruchrechnungen auftretende kennen lehrt, welches aber bei dem sogenannten kaufmännischen Rechnen auch heute noch empfohlen zu werden pflegt, und für welches sich in England sogar der an „wälsche

*) Kepler wendet als Einerstrich diese Bezeichnung an:
(. So ist 21,90 ≡ 21 (90.

110) *Kepler*, *opera omnia*, Vol. V. S. 547. 111) *Kuckuck*, Die Rechenkunst im sechszehnten Jahrhundert, Berlin 1874. S. 25. 112) *Cantor*, Rezension hierzu, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. S. 68. H. Abth.

Praktik" erinnernde Name Practice erhalten hat". Als einen Hauptvertreter dieser Methode nennt Cantor den Ulmer Rechenmeister Krafft; nach Ofterdinger[113]) lebte dieser Mann von 1597 bis zu seinem Tode (1620) als „Modist" (Kalligraphielehrer) und Rechenmeister zu Ulm und verfasste zwei Rechenbücher, deren erstes 1591 zu Frankfurt a. M.[114]) erschien.

Wir glaubten, wie oben angeführt, auch in dem Rechenbuch eines gewissen Schleupner Aehnliches zu finden; jedoch täuschten wir uns hierin, und es ist so die Notiz von Favaro[115]) völlig berechtigt. Durch die Untersuchungen dieses Gelehrten haben überhaupt unsere eigenen Forschungen über die Geschichte der Kettenbrüche eine fast auf alle Punkte sich erstreckende Bestätigung, stellenweise jedoch auch eine Berichtigung und Ergänzung gefunden.

Zu §. 20. Da das Werk Druckenmüller's fast gänzlich unbekannt zu sein scheint und doch bereits eine Menge Dinge in sich schliesst, deren Erledigung spätere Autoren wieder von vorn beginnen zu müssen glaubten, so wird eine kurze Inhaltsangabe hier nicht am unrechten Orte sein.

Indem der Verfasser die Definitionsgleichung

$$\frac{r}{b} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} + \frac{\alpha_3}{x^4} + \cdots$$

aufstellt, nennt er den rechtsstehenden Ausdruck eine Kettenreihe der Basis x (S. 2), die α sind die „Elemente", $\frac{r}{b}$ der „Hauptbruch". Die hieran sich anschliessenden Begriffe einer „gemischt"- und „rein"-periodischen Kettenreihe (S. 6) sind an sich evident, ebenso der Fundamentalsatz: *Jeder Bruch, dessen Nenner mit der Basis keinen gemeinschaftlichen Faktor hat, liefert eine reinperiodische Kettenreihe* (s. §. 20.).

Die Theorie dieser letzteren Gebilde wird im zweiten Kapitel ausführlich behandelt, wobei interessante zahlentheoretische Bemerkungen (z. B. S. 24) mit vorkommen. Hier folgen dann weiter Sätze, bei deren genauerer Untersuchung man sicher die Mehrzahl der anscheinend neuen Theoremen wird hervortreten sehen, welche spätere Mathematiker über periodische Dezimalbrüche aufgestellt haben. Eine ausführlichere Mittheilung über diesen Gegenstand behalten wir uns für eine andere Gelegenheit vor.

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit endlichen Kettenreihen; diese Untersuchung gipfelt in dem Lehrsatze (S. 173):

„*Alle Zahlen, welche sich bloss um ein Vielfaches des Nenners b von einander unterscheiden, liefern als Basen für diesen Nenner lauter endliche Kettenreihen mit derselben Elementenzahl, wenn eine unter ihnen ist, welche zu einer endlichen Kettenreihe führt*".

---

113) *Ofterdinger*, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts, Ulm 1867. S. 4. 114) *J. Kraft*, Rechenbüchlein von mancherley Kaufmanhändel, Frankfurt 1591. 115) *A. Favaro*, *Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo*, Boncompagni's Bullet., Tomo VII. S. 476.

Nachdem nun in den beiden vorangehenden Abschnitten die Materialien zur Beleuchtung des ganz allgemeinen Falles gewonnen sind, folgt jetzt (S. 197 ff.) die Diskussion der gemischtperiodischen Kettenreihen, und daran schliesst sich als Anhang die im Text erwähnte „Anwendung der Theorie der Kettenreihen zur Auflösung der binomischen unbestimmten Gleichungen", wo Druckenmüller seiner eigenen Aussage nach (Vorwort, V) manches von Gauss antizipirt fand.

Auf den Zusammenhang seiner Kettenreihen mit den Kettenbrüchen ist der Verfasser nicht weiter eingegangen, obschon er mehrfach darauf hinweist. Einige Direktiven zum Studium dieses Zusammenhanges haben wir kürzlich in unserer Abhandlung „Ueber aufsteigende Kettenbrüche" im 20. Bande der Schlömilch'schen Zeitschrift gegeben — bei der oben schon angedeuteten in Aussicht genommenen weiteren Ausführung jener Betrachtungen wird sich dann für jene Beziehung der Satz als wichtig erweisen:

Jede unreinperiodische Kettenreihe ist äquivalent einem unreinperiodischen Kettenbruch.

Anmerkung. Jenes Exemplar des Druckenmüller'schen Buches, dem wir die hier gegebenen Exzerpte entnehmen, kam erst nach Beendigung des ganzen Werkes in unsere Hände.

Kapitel III.

Das Newton'sche Parallelogramm und die Cramer-Puiseux'sche Regel.

Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionstheorie.

§. 1. Erst in allerneuester Zeit, besonders durch eine Bemerkung des so früh dahingeschiedenen Clebsch[1]), ward die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf ein eigenthümliches Verfahren hingelenkt, welches, an sich rein mechanisch, gleichwohl mit grossem Vortheil zur Lösung schwieriger analytischer Probleme verwandt werden konnte. Clebsch selbst glaubte die ersten Spuren dieser Methode in dem sicher noch viel zu wenig ausgebeuteten Werke des Genfer Mathematikers Gabriel Cramer zu erkennen. Dem jedoch, der die wissenschaftliche Geschichte des vorigen Jahrhunderts zusammenhängend studirte, konnte es nicht verborgen bleiben, dass hier ausschliesslich nur Anwendungen jenes sinnreichen Hülfsmittels vorlägen, welches unter dem Namen des „Newton'schen Parallelogramms" seiner Zeit gerechtes Aufsehen erregte. Zweck dieser Studie ist es, die Entwickelung dieses Verfahrens eingehend zu verfolgen und auch die neuesten Phasen zu beleuchten, in welche dasselbe eingetreten zu sein scheint.

Newton's Originalabhandlung über diesen Gegenstand findet sich in seinem berühmten Werke: *„Methodus fluxionum et serierum infinitarum."* Diese Schrift, welche ihres nicht eben bedeutenden Umfanges halber den Zeitansichten gemäss nicht als selbstständiges Buch erscheinen konnte, sollte deshalb einem anderen als Anhang beigegeben werden, anfänglich der von Newton vorbereiteten Ausgabe von Kinckhuysen's Algebra, später einem optischen Traktat, wie dies aus seinen

1) *Clebsch*, Julius Plücker zum Gedächtniss, Göttingen 1872. S. 17.

eigenen Worten[2]) hervorgeht. Beides kam nicht zu Stande; wohl aber erschien nach dem Tode des Verfassers eine von einem Kommentar begleitete englische Uebersetzung[3]), von welcher noch mehrfach die Rede sein wird; eine französische (von Buffon) folgte ihr bald darauf nach. Das lateinische Original dagegen ward von Castillon[4]) in seine Gesammtausgabe Newton'scher Posthuma aufgenommen, und auf diesen Text werden wir uns im Folgenden stets beziehen.

§. 2. Die betreffende Abhandlung beginnt mit einer Beschreibung der jetzt so bekannt gewordenen Näherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen; hierauf wird zu den literalen Gleichungen übergegangen, den *„aequationes speciosae"*, wie man sich im Anschluss an die von Vieta geschaffene Terminologie ausdrückte. Die Idee, auf welcher alles weitere beruht, können wir am kürzesten klar stellen, wenn wir mit Kästner sagen[6]):

„Aus einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen die eine y durch eine Reihe, deren Glieder nach Potenzen der anderen x, geordnet sind, zu finden, wofern die Gestalt dieser Reihe gegeben ist."

Diese Reihenentwickelung gestaltete sich nach damaligen Begriffen äusserst einfach, insofern man unbedenklich den Satz der unbestimmten Koëfficienten anwenden zu dürfen glaubte. Nur der eine Umstand konnte Schwierigkeiten bereiten, die unbekannte „Gestalt" der Reihe; das heisst, man vermochte *a priori* nicht zu wissen, nach welchem Gesetze die Exponenten der Reihe fortschreiten sollten. Und gerade diesem Uebelstande

2) *Commercium epistolicum Dr. J. Collins et aliorum de analysi promota jussu regiae societatis in lucem edita*, Londini 1723, N. XXII, XXIII, S. 101, 102. N. LVII. S. 149. 3) *Newton, The Method of fluxions and infinite series*, translated by J. Colson, London 1736. 4) *Isaaci Newtoni Opuscula mathematica, philosophica et philologica. Collegit partimque Latine vertit et recensuit Joh. Castillioneus*, Tom. I. Lausannae et Genevae 1744.*) S. 29 ff. 5) *Wolf, Matériaux divers pour l'histoire des mathématiques*, Boncompagni Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze mat. e fis. Tomo II. S. 19 ff. 6) *Kästner*, Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, Göttingen 1794. S. 417.

*) Es ist dies einer der vielen Verlagsartikel des bekannten Buchhändlers Michael Bousquet, dessen rührige Thätigkeit im mathematischen Fache durch Wolf[5]) eine ausführliche Würdigung erfahren hat.

war Newton's Regel abzuhelfen bestimmt, welche er selbst folgendermassen darstellt[7]):

„Ex omnibus Terminis, e quibus absunt species radicales (y; p; q; r; etc) elige illum, in quo species indefinita (x; vel z; etc.) minimae Dimensionis est; Deinde elige alium Terminum, qui radicalem speciem contineat, et talis sit, ut Progressio Dimensionum uniuscujusque ex supradictis speciebus, aut quo majori potest gradu descendat aut quo minori ascendat; Et si plures sunt Termini, quarum Dimensiones non recedant ab hac Progressione, quòusque libet productâ, pariter sumendi sunt. Demum ex his Terminis ita sepositis et nihilo aequatis, excude valorem dictae radicalis speciei, et illum Quotienti adscribe.“

Der Sinn dieser etwas dunkel gehaltenen Vorschrift würde der sein:

Versteht man unter x und y kleine Grössen, so soll aus der ganzen und rationalen Funktion, welche der Gleichung

$$f_{(x,\,y)} = 0$$

genügt, eine neue gebildet werden, welche mit der ursprünglichen nur die Glieder gemein hat, welche eine relativ überwiegende Dimension besitzen.

Um dies zu leisten, bilde man alle denkbaren Kombinationen, welche zwischen den verschiedenen Potenzen von x und y statthaben können, und ordne dieselben in Gestalt eines Rechtecks an, so dass etwa in der Abszissenaxe ausschliesslich Potenzen von y, in der Ordinatenaxe ebenso ausschliesslich Potenzen von x sich befinden, wie dies in nebenstehendem Schema der Fall ist:

x^5	x^5y^1	x^5y^2	x^5y^3	x^5y^4	x^5y^5	x^5y^6	x^5y^7 ...
x^4	x^4y^1	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	x^4y^7 ...
x^3	x^3y^1	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	x^3y^7 ...
x^2	x^2y^1	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6	x^2y^7 ...
x^1	x^1y^1	x^1y^2	x^1y^3	x^1y^4	x^1y^5	x^1y^6	x^1y^7 ...
$x^0=y^0$	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7 ...

Ist das Schema ausgefüllt, so markire man jede in der vorgelegten Gleichung auftretende Kombination von x und y in demselben, lege ein Lineal auf die y-Axe und lasse dasselbe

7) *Newton*, S. 41.

um jenen markirten Punkt dieser Axe eine Drehung machen, welcher dem Nullpunkt am nächsten liegt. Sowie das bewegte Lineal einen weiteren markirten Punkt getroffen hat, sistire man die Drehung. Alsdann gilt der Satz:

In die neue Gleichung gehen blos diejenigen Glieder ein, welche durch die Endlage des Lineals mit einander in Verbindung gesetzt sind.

Das Beispiel, welches Newton selbst anführt, ist folgendes: Gegeben ist die Gleichung

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{1}{a}x^3y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0.$$

Wir markiren im obigen Schema die betreffenden Glieder durch Unterstreichen und erkennen so den Punkt x^3 als Drehpunkt des Lineals. Die Endlage ist die Verbindungslinie $x^3 - y^6$; auf dieser Geraden liegt auch x^2y^2, und wir haben somit als neue Gleichung diese erhalten:

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0.$$

Die so errechnete Gleichung wird nun in vielen Fällen so beschaffen sein, dass sie ein direktes Ausdrücken der einen Unbekannten (Variabeln) durch die andere gestattet. So findet man $y = \varphi_x$, und dieser Werth ist es, dessentwegen die ganze Untersuchung eigentlich vorgenommen wurde.

Es handelte sich ja, wie wir oben zeigten, lediglich darum, y als unendliche Reihe in x darzustellen, und hierbei kam es vor Allem darauf an, das erste Glied dieser Reihe zu kennen. Dieses erste Glied ist aber kein anderes, als unser soeben erhaltenes φ_x. Behalten wir Newton's Exempel bei und dividiren die letzte Gleichung durch a^3x^3, so können wir ihr nachstehende Form ertheilen:

$$\left(\frac{y^2}{ax}\right)^3 - 7\frac{y^2}{ax} = -6,$$

oder durch die Substitution

$$y = u\sqrt{ax},$$

die folgende:

$$u^6 - 7u^2 = -6.$$

Diese Gleichung ergiebt als reelle Wurzeln $u = 1$ und $u = \sqrt{2}$, so dass für y die 4 Werthe

$$\pm\sqrt{ax},\ \pm\sqrt{2ax}$$

resultiren. „*E quibus quemlibet assumere possum pro Quotientis Termino primo, tamen seligendus est ille qui convenit huic aut illi Radici, quam extrahere cupio*“[8]).

§. 3. Mit der Auffindung des ersten Gliedes ist natürlich schon Viel geleistet, indess kann durch sukzessive mehrmalige Anwendung des Parallelogramms auch jedes Folgeglied bestimmt werden. Wir werden uns mit diesem Gedankengang am einfachsten dadurch vertraut machen, dass wir abermals ein Beispiel Newton's genau analysiren.

Die Gleichung[9])

$$y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$$

liefert in erster Näherung („*aequatio fictitia*“)

$$y^3 + a^2y - 2a^3 = 0,$$

woraus $y = a$ folgt. Dieses a ist sonach das erste Glied; y selbst aber ist nicht $= a$, sondern gleich $a + p$, unter p einen nicht weiter bekannten Zuwachs verstanden. Dies eingesetzt geht die ursprüngliche Gleichung in diese über

$$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 + a^2x + apx + a^3 + a^2p - 2a^3 - x^3 = 0,$$

und auf diese neue Gleichung wird nun wiederum das Parallelogramm angewandt. Man bildet das Schema

$$\begin{array}{cccc} \underline{p^3} & p^3x^1 & p^3x^2 & p^3x^3 \ldots \\ \underline{p^2} & p^2x^1 & p^2x^2 & p^2x^3 \ldots \\ \underline{p^1} & \underline{p^1x^1} & p^1x^2 & p^1x^3 \ldots \\ 1 & \underline{x^1} & x^2 & \underline{x^3} \ldots \end{array}$$

und erkennt, da ein von p und x freies Glied nicht vorhanden ist, dass das Lineal die Endlage $p - x$ haben wird; die hieraus sich ergebende Gleichung ist also:

$$4a^2p + a^2x = 0.$$

Der Werth $\left(p = -\frac{x}{4}\right)$ ist nicht genau; es muss vielmehr

$$p = -\frac{x}{4} + q$$

gesetzt werden, und man bekommt als neue Hauptgleichung

8) *Newton*, S. 42. 9) *Ibid.* S. 44.

$$-\frac{x^3}{64}+\frac{3}{16}qx^2-\frac{3}{4}q^2x+q^3+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}aqx+3aq^2$$

$$-\frac{1}{4}ax^2+aqx-a^2x+4a^2q+a^2x-x^3=0.$$

Nunmehr sieht das Parallelogramm so aus:

$$\begin{array}{cccc} \underline{q^3} & q^3x^1 & q^3x^2 & q^3x^3 \ldots \\ \underline{q^2} & \underline{q^2x^1} & q^2x^2 & q^2x^3 \ldots \\ \underline{q^1} & \underline{q^1x^1} & \underline{q^1x^2} & q^1x^3 \ldots \\ 1 & x^1 & \underline{x^2} & \underline{x^3} \ldots \end{array}$$

und aus der Endlage $q-x^2$ folgt

$$4a^2q+\frac{3}{16}ax^2-\frac{1}{4}ax^2=0,$$

$$q=\frac{x^2}{64a}.$$

Begnügen wir uns mit der bisher erlangten Genauigkeit, so ist approximativ

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a},$$

und es liegt auf der Hand, wie ohne alle Schwierigkeit die Reihe beliebig fortgesetzt werden kann.

§. 4. Im weiteren Verlaufe kommt Newton auch darauf zu sprechen, wie man sich bei gewissen Ausnahmsfällen zu verhalten habe. Liegt eine Gleichung von ungewöhnlich viel Gliedern vor, so gilt folgende Anweisung[10]): *„Antequam opus aggrediaris, rejice omnes Terminos in quibus Dimensio speciei indefinite parvae et non affectae a Radicali specie excedit altissimam Dimensionem in Quotiente requisitam, aut è quibus, cùm pro Radicali specie substitutis primum Terminum detectum ope Parallelogrammi, ut suprâ, exsurgere nequeunt nisi Termini excedentes“*. Auch kann — wie dies oben wirklich der Fall war — das Anfangsglied sich in irrationaler Form oder als Wurzelwerth einer unauflösbaren Gleichung darstellen. Dergleichen Schwierigkeiten wogen jedoch in einer Zeit nicht allzuschwer, wo man sich um Konvergenz noch nicht kümmerte und Mittel zu besitzen glaubte, um jede noch so verwickelt erscheinende analytische Form in eine Potenzreihe überzuführen. Indess

10) *Newton*, S. 47.

berühren diese Fragen auch nur in secundärer Weise die Theorie und den Gebrauch des Parallelogramms.

Strenge genommen dürfen wir nur von letzterem sprechen, denn an einen Beweis der Richtigkeit seines Mechanismus scheint Newton überhaupt nicht gedacht zu haben. Es ist nicht das erstemal in der Geschichte der Mathematik, dass wir auf eine solche Erscheinung treffen; nicht selten hält es ein hervorragender Geist für unnöthig, dem Leser genaue Rechenschaft von den Schlüssen zu geben, welche ihn zur Erfindung eines an sich untergeordneten Hülfsmittels leiteten, sondern er begnügt sich mit Angabe eines kurzen Beweises *a posteriori* oder verzichtet auch im Gefühle seiner Sicherheit auf diesen. Es trat sonach an Newton's Zeitgenossen und Nachfolger die Pflicht heran, die Resultate des Meisters systematisch zu begründen und die Verwendbarkeit seiner Regel auch bei anderen Problemen darzuthun. Dass er selbst von dieser einen ausgedehnten Gebrauch zu machen verstand, davon legt der ganze „*Methodus fluxionum*" die mannigfachsten Proben ab, indess bewegen sich sämmtliche Anwendungen innerhalb des bereits angedeuteten Gebietes. Freilich ist es wahrscheinlich, dass er die Methode auch in einen ganz anderen Forschungskreis hinübertrug und auf diese Weise Probleme löste, deren jetzige Fassung absichtlich den Entstehungsmodus verdunkelt, wie diess bei Newton ja wohl auch sonst vorkam. Hievon können wir jedoch erst später im Zusammenhange sprechen.

Die erste ausführliche Darstellung der Newton'schen Regel lieferte der bereits genannte Colson[11]), ohne jedoch auf die theoretische Seite der Sache näher einzugehen; er hat dieselbe, wie Kästner[12])*) bemerkt, „in seinem beigefügten Commentario sehr weitläufig erläutert, aber keinen tüchtigen

*) Schon in der Vorrede zur ersten Auflage rügt er Colson's Verfahren. Derselbe hat, ihm zufolge, „den Gebrauch dieser Methode zwar sehr deutlich und weitläuftig erklärt, aber von dem Beweise, weniger gesagt, als ein gemeiner Rechenmeister bey den Regeln der Rechenkunst zu sagen pflegt, so dass mir das Vergnügen übrig blieb die Gründe von allen Vorschriften selbst aufzusuchen." Die Gründe, welche den Urheber allenfalls von der Verpflichtung eines strengen Beweises dispensiren mögen, konnten allerdings nicht mehr für den Commentator bestehen.

11) *The method of fluxions*, S. 324. 12) *Kästner*, S. 420. 13) *Ibid.* S. VI.

Beweis davon gegeben.“ Das Gleiche gilt von den Arbeiten S'Gravesande's[14]) und Stirling's[15]). Dass Newton selbst seine Methode als eines Beweises kaum bedürftig ansah, geht auch aus der überaus kurzen Beschreibung hervor, welche er[13]) durch Oldenburg's Vermittelung an Leibnitz gelangen liess. Es kämen zwar hie und da kleine Anstände bei Benützung seiner Vorschrift vor: *„sed ex iis, credo, Leibnitius se proprio Marte extricabit“*. Diese Worte sind sehr bezeichnend für den Gesichtspunkt, unter dem er die ganze Sache betrachtete.

Wir gewahren so durch nahezu 50 Jahre das eigenthümliche Schauspiel, dass eine wissenschaftliche Neuerung allgemein anerkannt und mit bestem Erfolge weiteren Forschungen zu Grunde gelegt wurde, ohne doch ein sicheres theoretisches Fundament zu besitzen. Freilich gilt ersteres in dieser Ausschliesslichkeit auch nur von den englischen und französischen Mathematikern, während man in Deutschland theilweise einiges Misstrauen empfinden mochte. So schreibt der jüngere Tobias Mayer, ein tüchtiger Gelehrter, noch im Jahre 1772 an Lambert, dass ihm Nicolaus Bernoulli's Methode, die „Gestalt“ der Reihen zu bestimmen, weit mehr zusage, als Newton's Parallelogramm[17]) — dieselbe ist nichts anderes als eine zweimalige Anwendung der unbestimmten Coëfficienten. „Diese Methode“ — sagte er — „ist viel leichter zu verstehen als das Neutonische Parallelogramm. Ich muss gestehen, dass mir in dem ganzen Kästnerischen Handbuche die Lehre von diesem Parallelogramm, im Anfange meines analytischen Studii am meisten Mühe gekostet hat. Im Grunde hat mir dieses Parallelogramm nie recht gefallen“.

Wie so häufig, ward auch hier von zwei völlig verschiedenen Seiten her eingegriffen:

Der endgültige theoretische Nachweis für die Richtigkeit des Newton'schen Verfahrens ward ziemlich gleichzeitig und völlig unabhängig von Kästner und Cramer erbracht.

14) *S'Gravesande, Elementa Matheseos universalis*, Lugduni Bat. 1727. S. 233 ff. 15) *Stirling, Illustratio Tractatus D. Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis*, Oxoniae 1717, S. 12. 16) *Isaaci Newtoni epistola posterior ad Oldenburgium, Opuscula ed. Castillon*, Tom. I. S. 351 ff.
17) *J. H. Lambert's* deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von *Joh. Bernoulli*, 2. Band, Berlin 1782. S. 444.

Wir werden im Nachfolgenden die synchronistische Darstellungsweise etwas bei Seite lassen und uns ausschliesslich an den inneren Zusammenhang halten.

Der deutsche Mathematiker berücksichtigt hauptsächlich die analytische Seite, für den Schweizer stehen die geometrischen Anwendungen im Vordergrund. Und auch eine andere nicht principielle aber doch tiefgehende Verschiedenheit liegt vor, aus dem englisch-deutschen auf der horizentalen Basis stehenden Parallelogramm ist durch französischen Einfluss ein auf die Spitze gestelltes Dreieck geworden. Da der Inhalt der Kästner'schen Gelegenheitsschrift, auf die wir uns hier beziehen[18]), vollständig in seine mathematische Encyklopädie[19]) übergegangen ist, so brauchen wir blos auf letztere Rücksicht zu nehmen.

§. 5. Kästner's Vortrag kann sich bekanntlich keiner allzugrossen Deutlichkeit und Uebersichtlichkeit rühmen, und zumal in seiner voluminösen 67 Seiten umfassenden Darstellung der Lehre vom Newton'schen Parallelogramm ist es nicht eben leicht, sich zurechtzufinden. Es war daher ein ganz verdienstvolles Unternehmen, dass bald nach dem Erscheinen der ersten Auflage einer seiner Schüler ein Schriftchen[20]) veröffentlichte, welches die einzelnen Grundgedanken herauszuheben und eine vollständige Orientirung im Original anzubahnen beabsichtigte. Durch diese Abhandlung Holland's wurde nicht allein dem damaligen Studirenden, sondern auch dem späteren Historiker die Arbeit wesentlich erleichtert. Der Verfasser theilt den Stoff sachgemäss folgendermassen ein[21]).

„1) Wird neben der Konstruktion des Parallelogramms gezeigt, was für Eigenschaften die gehörig darein gesetzte Grössen in Vergleich unter einander haben;

2) Wird die Natur der Reyhen betrachtet, und gezeigt, wie die Gleichungs-Reyhen gefunden werden;

3) Wird die Methode, Reyhen durch das Parallelogramm zu finden, aus dem vorhergehenden hergeleitet, und würklich angewandt;

---

18) *Kaestner, Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series,* Lipsiae 1743. 19) *Id.,* Analysis endlicher Grössen, S. 419 ff. 20) *Holland,* Inhalt des Kästnerischen Vortrags vom Newtonischen Parallelogramm, Tübingen 1765. 21) *Ibid.* S. 4.

4) Werden noch einige besondere Fälle und dahin gehörige Anmerkungen vorgetragen."

Der erste Theil der anzustellenden Untersuchung ist demgemäss wesentlich geometrischer Natur. Dieselbe gipfelt in dem leicht zu beweisenden Satze:

Theilt man zwei anstossende Seiten eines beliebigen Parallelogramms in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile und zieht durch jeden Theilpunkt eine Parallele zur anderen Seite, so zerfällt das ursprüngliche Parallelogramm in kleinere, die sämmtlich kongruent sind. Verbindet man also zwei beliebige Schnittpunkte und verlängert diese Strecke um ihre eigene Länge, so erreicht man wieder einen Schnittpunkt.

In Wirklichkeit spricht Kästner[22]) die Thatsache nicht in dieser Allgemeinheit aus; es ist jedoch sofort einleuchtend, dass aus derselben seine Folgerungen unmittelbar hervorgehen müssen.

Alsdann wird ein Parallelogramm gebildet, dessen Winkelpunkten gewisse Zahlen zugeordnet werden. Ein willkürlicher Punkt wird als Anfangspunkt eines den Seiten entsprechenden Axenkreuzes betrachtet und mit Null bezeichnet, für die einzuschreibenden Zahlen gilt das Gesetz, dass sie in der Richtung des positiven x und y in einer einfachen arithmetischen Progression zu-, in den entgegengesetzten Richtungen dagegen ebenso abnehmen. So entsteht beispielsweise folgende Anordnung:

$-m+3b$	$3b$	$m+3b$	$2m+3b$	$3m+3b$	$4m+3b$
$-m+2b$	$2b$	$m+2b$	$2m+2b$	$3m+2b$	$4m+2b$
$-m+b$	b	$m+b$	$2m+b$	$3m+b$	$4m+b$
$-m$	0	m	$2m$	$3m$	$4m$
$-m-b$	$-b$	$m-b$	$2m-b$	$3m-b$	$4m-b$
$-m-2b$	$-2b$	$m-2b$	$2m-2b$	$3m-2b$	$4m-2b$.

Es gilt über dies Schema offenbar Folgendes:

Verbindet man zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte durch eine Gerade, so trifft dieselbe, nach beiden Seiten verlängert, nur solche Punkte, deren Zahlenwerthe in arithmetischer Progression stehen.

Setzt man zwei Zahlenwerthe einer solchen Geraden einander

22) *Kästner*, S. 424 ff.

gleich, so erstreckt sich diese Gleichheit auch auf alle übrigen dieser Geraden angehörenden Werthe, und ebenso verhält sich alles auf einer parallelen Geraden.

Denkt man sich jene Gerade bewegt, so kommt sie beziehungsweise an grössere oder kleinere Werthe, je nachdem diese Bewegung nach Oben oder Unten erfolgt.

Dies sind die geometrischen Prämissen, auf denen die im Folgenden darzulegende Begründung und Erweiterung der Lehre vom Parallelogramm beruht.

§. 6. Wir sprachen soeben von einer Erweiterung der ursprünglichen Methode, und in der That hat sich eine solche, wie bald erhellen wird, vollzogen. Wenn auch angebahnt durch die Arbeiten der genannten englischer Mathematiker tritt uns dieselbe doch erst bei Cramer und Kästner ganz bewusst und fertig entgegen, so dass wir ihre genauere Charakterisirung mit Fug bis hieher verschieben durften. Um die Genesis dieser Neuerung, welche eigentlich erst die Lehre vom Parallelogramm zu einer wahrhaft fruchtbaren machte, klar zu übersehen, wird es erforderlich sein, das analytische Fundament des ganzen Verfahrens zu untersuchen und zuzusehen, in welchen Punkten die von Newton gegebene Lösung des Hauptproblems sich als unzulänglich erwies.

Wie wir wissen, kam es darauf an, aus einer zwei variable Grössen implizite enthaltenden, algebraisch-rationalen ganzen Funktion die eine Veränderliche linear durch eine nach Potenzen der anderen fortschreitende Reihe auszudrücken.

Newton lehrte ein Verfahren, durch einen sukzessive wiederholten Mechanismus jedes einzelne Glied dieser Reihe herauszurechnen; da für ihn die angestrebte Darstellung blos Mittel zum Zwecke war, so konnte er sich bei einem Verfahren beruhigen, welches praktisch nie im Stiche zu lassen schien. Allein seine Nachfolger mussten die Sache systematischer auffassen und legten sich deshalb eine neue Frage vor, deren Fassung nach den in §. 2. gegebenen Erläuterungen verständlich sein wird. Diese neue Frage war die:

Könnte nicht ebenso, wie bei Newton das Parallelogramm immer wieder von neuem zur Bestimmung der einzelnen Reihenglieder angewandt wurde, durch eine einzige Operation die Gestalt der Reihe, d. h. das Fortschreitungsgesetz der Exponenten gefunden werden?

Zur Beantwortung dieser Frage bedurfte es zuvörderst einer Reihe rein analytischer Ueberlegungen.

Wir denken uns eine endliche Reihe von beliebig vielen Summanden gleich Null gesetzt, deren allgemeines Glied die Form

$$A x^p y^q$$

hat, unter A eine willkürliche Konstante, unter p und q ganze positive Zahlen verstanden. Es wird dann, gewissermassen nur versuchsweise,

$$y = a_1 x^m + a_2 x^{m+d} + a_3 x^{m+2d} + a_4 x^{m+3d} + \ldots$$

und dieser Werth von y in jedem Gliede der obigen Reihe gesetzt. Enthält dieselbe im Allgemeinen r Glieder, so zerfällt sie jetzt in r unendliche Reihen, welche in eine einzige kontrahirt werden sollen, und hiezu verhilft eine einzige, beziehungsweise zwei mechanische Verrichtungen am Newton'schen Parallelogramm.

Handelt es sich zunächst blos darum, den Werth m zu finden, so setzt man zunächst $y = a_1 x^m$ und ordnet sämmtliche sich ergebende Exponenten in das Parallelogramm ein. Dann hat man noch die Wahl, ob man in eine ab- oder aufsteigende Reihe entwickeln will; auch wird es im Allgemeinen mehrere an sich gleichberechtigte Reihen geben, deren Auswahl der spezielle Zweck bestimmt. Um sie sämmtlich zu finden, verfahre man so:

Man wähle den auf der Ordinatenaxe dem Anfangspunkte zunächst liegenden Punkt zum Drehpunkte des Lineals. Dann bewege man das Lineal so lange der Richtung des Uhrzeigers entgegen, bis es einen (oder mehrere) markirte Punkte trifft. Den entferntesten derselben mache man zum neuen Drehpunkt und fahre mit dieser Operation so lange fort, bis man den am weitesten von der Ordinatenaxe entfernten Punkt trifft. Alle so erreichten Zahlenwerthe setze man einander gleich; jede der Gleichungen liefert einen brauchbaren Werth für m, wofern die Reihe aufsteigen soll. Für absteigende Reihen verfahre man ebenso, indem nur der Drehsinn der entgegengesetzte wird; der Schlusspunkt der Drehung muss mit dem vorigen zusammenfallen, und es erscheinen so sämmtliche markirte Punkte durch ein geschlossenes Polygon von den übrigen abgeschieden.

Ein Beispiel wird diess sofort deutlich machen.

Vorgelegt sei die Gleichung

$$y^4x - y^2x^3 + yx^3 - y^2 + ax^2y + 4xy - x^2 = 0.$$

Die bewusste Substitution liefert die neue Gleichung:

$$a_1^4x^{4m+1} - a_1^2x^{2m+3} + a_1x^{m+3} - a_1^2x^{2m} + aa_1x^{m+2} + 4a_1x^{m+1} - x^2 = 0.$$

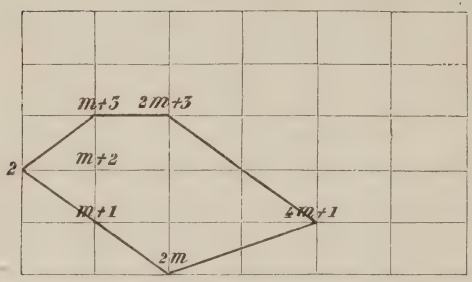


Fig. 1.

Wir konstruiren das in Fig. 1 dargestellte Zahlenschema und markiren darin in gewohnter Weise die wirklich vorkommenden Exponenten. Dann gilt, wie man bald sieht, für die aufsteigenden Reihen der Linienzug

$$2;\quad m+1;\quad 2m;\quad 4m+1,$$

für die absteigenden Reihen der Linienzug

$$2;\quad m+3;\quad 2m+3;\quad 4m+1.$$

Es resultiren also im Ganzen 6 Gleichungen, die im Nachstehenden dargestellt sind; Serie I entspricht den aufsteigenden, II den absteigenden Reihen.

I.		II.	
$4m+1=2m;$	$m=-\frac{1}{2}.$	$4m+1=2m+3;$	$m=1.$
$\left.\begin{matrix}2m\\m+1\end{matrix}\right\}=2;$	$m=1.$	$2m+3=m+3;$	$m=0.$
		$m+3=2;$	$m=-1.$

Dieses Beispiel, welches wir einer anderen sehr beachtenswerthen Tübinger Dissertation[23]) entnehmen, ist in doppelter Beziehung lehrreich. Einmal nämlich beleuchtet es sehr klar das Mechanische des Verfahrens, welches auch beim allgemeineren Falle im Grunde das nämliche bleibt, und dann zeigt es, wie man sich zu verhalten hat, wenn auf einer Begrenzungslinie des Polygons mehrere markirte Punkte liegen. Wir werden hierüber uns also nicht weiter zu verbreiten nöthig haben,

23) *Pfeiffer, Aequationum speciosarum resolutio per series ope parallelogrammi Newtoniani*, Tubingae 1765. S. 24.

und auch der Fall, wo in die Gleichung negative Exponenten eingegangen sind, braucht uns nicht zu beschäftigen. Denn da das Parallelogramm, wie schon bemerkt, auch für negative Werthe zu Recht besteht, so bleibt das Verfahren unverändert; übrigens kann man ja auch durch eine einfache Substitution die negativen Potenzen beseitigen.

§. 7. Nachdem so die vorbereitende Frage erledigt ist, kehren wir zu dem allgemeineren Falle zurück. Zunächst lässt sich sehr leicht zeigen, dass die so eben besprochene Methode ganz mit der Newton's übereinstimmt, und die Grösse d durch unausgesetzte Anwendung der nämlichen Operation praktisch liefert.

Um jedoch den endgültigen Abschluss dieser Lehre herbeizuführen, erübrigt noch der Nachweis, dass die Differenz d der von den Exponenten befolgten arithmetischen Reihe auch durch ein independentes Verfahren aus dem Parallelogramm hergeleitet werden kann.

Und in der That lässt sich auch diese Aufgabe ohne grosse Schwierigkeit lösen, wie wir nun im Anschluss an Holland's Darstellung zeigen wollen[24]).

Es gelingt nämlich durch eine einfache Rechnung nachzuweisen, dass, wenn die ursprüngliche Gleichung unserer obigen Annahme gemäss in r Einzelreihen zerfällt, die Exponenten der Anfangsglieder dieser Reihen ebenfalls in arithmetischer Progression stehen, deren Differenz nichts anderes als unser obiges d ist. Nachdem also der Werth m durch Anwendung des Parallelogramms gefunden ist, hat man nur den grösseren Zahlenwerth vom kleineren zu subtrahiren, wenn man eine absteigende Reihe haben will. Für eine aufsteigende ist die nämliche Operation, nur entgegengesetzt, zu machen.

Es soll z. B. nach dieser Vorschrift die schon früher behandelte Gleichung

$$x^3 - a^2y + y^2x + y^3 = 0$$

behandelt werden. Man setzt wieder

$$y = a_1x^m + a_2x^{m+d} + \ldots,$$

---

24) *Holland*, S. 9.

und zwar soll d negativ sein. Wird in bekannter Weise $y = a_1 x^m$ gesetzt, so entsteht das Parallelogramm

$$\begin{array}{cccc} 3 & m+3 & 2m+3 & 3m+3 \\ 2 & m+2 & 2m+2 & 3m+2 \\ 1 & m+1 & 2m+1 & 3m+1 \\ 0 & m & 2m & 3m. \end{array}$$

3 ist Pivot der Drehung; da die Reihe eine nach fallenden Potenzen geordnete sein soll, so wird die Anfangslage des Lineals diese sein : $3 - 2m + 1 - 3m$. Diess giebt, wie schon erwähnt, zwei identische Bestimmungsgleichungen, die zu dem Werthe $m = 1$ hinführen. So ist denn also

$$m = 1;$$

dagegen ist auch

$$m = 3,$$

und wir bekommen so die Grösse

$$d = 1 - 3 = -2.$$

Hiemit aber ist das Bildungsgesetz der Reihe völlig bekannt, und zur Berechnung der Folgeglieder a_2, a_3 . . . ist die Beihülfe des Parallelogramms nicht mehr unbedingt erforderlich.

§. 8. Wir haben uns im Vorstehenden darauf beschränkt, den allgemeinen Gedankengang aus der vielfach verhüllenden Darstellungsweise gewissermassen herauszuschälen, und so mussten wir naturgemäss auf eine völlig umfassende Berücksichtigung aller Nebenumstände Verzicht leisten. Indess muss man sämmtlichen Mathematikern, welche sich eingehend mit Erörterung der Newton'schen Regel abgaben, das Zeugniss ertheilen, dass sie alle besonderen Fälle an's Licht zu ziehen und ihnen Rechnung zu tragen bemüht waren.

Die wichtigste analytische Anwendung fand das Parallelogramm in der Lehre von der Umkehrung der Reihen. In gewissem Sinn gehört hierher bereits Newton's Fundamentalproblem, welches ihn zur Erfindung des Parallelogramms veranlasste. Die Reihenreversion gehörte bei den Gelehrten des vorigen Jahrhunderts zu jenen, leider nur fingirten, mathematischen Universalrezepten, mit deren Hülfe man Alles und Jedes zu leisten glaubte. Begriff und Umfang der hier zu lösenden Aufgaben hat sich denn wohl auch in keiner anderen

Spezialdisziplin so sehr verschoben, wie ein Blick auf die Literatur von Newton bis Schloemilch[25]) lehrt.

Den Stand der Frage kennzeichnet uns am Besten ein sehr tüchtiger, aber wenig bekannter Schriftsteller der dreissiger Jahre, Hausen[26]), in seinem mathematischen Lehrbuch. Ihm zufolge liegen drei Hauptprobleme vor, welche er durch einen ersten, zweiten und dritten Lehrsatz erledigt. Die Variable z ist einmal gegeben durch eine nach Potenzen einer anderen Variablen y fortlaufende Reihe; es soll umgekehrt y in z ausgedrückt werden. Der zweite Fall ist eigentlich nur ein Unterfall des ersten; es kommen in der ersten Reihe nur ungerade Potenzen von y vor. Der dritte Fall beschäftigt sich damit, aus der Gleichung

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots$$

die eine Veränderliche linear durch die andere darzustellen.

Diese Aufgaben konnten nun auf zwiefache Weise in Angriff genommen werden:

Man konnte sowohl Gestalt, als auch Koëfficienten der neuen Reihe durch das recurrente Verfahren der unbestimmten Koëffizienten finden — sowie dieses Hausen thut — oder man konnte erstere durch ein independentes Verfahren ermitteln, am besten durch das Newton'sche Parallelogramm.

Wir schliessen uns hier wieder an Kästner an, dessen Auffassung eine ziemlich allgemeine ist. Es ist[27])

$$x = gy^\lambda + hg^{\lambda+\delta} + iy^{\lambda+2\delta} + \ldots,$$

wie findet sich y? Man setzt, als erste Annäherung, $y = Ax^m$; dann wird im Anschluss an §. 5. folgendes Parallelogramm zu bilden sein:

2	$m(\lambda + 2\delta)$	$2m(\lambda + 2\delta)$	$\ldots$
1	$m(\lambda + \delta)$	$2m(\lambda + \delta)$	$\ldots$
0	$m\lambda$	$2m\lambda$	$\ldots$

Die Anfangslage ist offenbar: $1 - m\lambda$, und wird sonach y in der Form

25) *Schloemilch*, Die allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen, Halle 1849. 26) *Hausen*, *Elementa Matheseos*, Pars I, Lipsiae 1730. S. 173 ff. 27) *Kästner*, S. 477.

$$Ax^m + Bx^{m+d} + \ldots$$

vorausgesetzt, so hat man jetzt

$$m = \frac{1}{\lambda}$$

Die Differenz d findet sich nach §. 7. durch Subtraktion des Exponenten $m\lambda$ vom Exponenten $m\ (\lambda + \delta)$, da ja die Reihe eine aufsteigende werden soll. So ist

$$m\lambda + m\delta - m\lambda = m\delta = \frac{\delta}{\lambda} = d,$$

und nun können die Koëfficienten der Reihe

$$y = Ax^{\frac{1}{\lambda}} + Bx^{\frac{1+\delta}{\lambda}} + \ldots$$

rein empirisch entwickelt werden.

Im Wesentlichen analog hat man sich bei komplizirteren Vorlagen zu verhalten; jedoch glauben wir, dass für unseren Zweck die Benützung des Parallelogramms zur Reversion von Reihen hiermit genügend illustrirt ist.

§. 9. Wir haben oben (§. 4.) der Möglichkeit Erwähnung gethan, dass Newton seinem Parallelogramm vielleicht auch manche seiner Entdeckungen auf dem Gebiete der Kurventheorie zu danken gehabt habe, denen er dann absichtlich eine den Ursprung nicht verrathende Form gegeben hätte. Diese Entdeckungen bezogen sich bekanntlich vornehmlich auf die Kurven dritter Ordnung; hier stellte er ziemlich abrupt eine Reihe von Theoremen hin, an deren Durcharbeitung die Geometer für lange zu thun hatten, ja deren systematische Einreihung in die Wissenschaft erst heutzutage als vollkommen gelungen gelten kann. Chasles, der die hierauf bezüglichen Studien mehrerer Gelehrter zusammenstellt, bemerkt dazu[28]): „Es ist unangenehm, dass Newton sich begnügt hat, diese herrlichen Entdeckungen ohne Beweis, selbst ohne irgend eine Andeutung der von ihm befolgten Methode, anzuführen .... Es scheint uns, dass die analytischen Betrachtungen, aus welchen diese Geometer die hinreichenden Beweise für die Wahrheit des Theorems von Newton geschöpft haben, nicht in die Natur und in die Grundidee desselben eingedrungen sind". Diess

28) *Chasles*, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohnke. Halle 1839. S. 142.

bezieht sich allerdings zunächst nur auf Chasles' Vermuthung, dass Newton gewisse Verfahrungsweisen der projektivischen Geometrie gekannt und angewandt habe, gilt aber, *mutatis mutandis*, auch für unsere Hypothese. Wenn also Kästner[29]) vom Parallelogramm sagt: „Newton hat vermuthlich auf diese Art das gefunden, was er in seiner *enumeratione linear. tertii ordinis* gelehrt hat," so hat diese Vermuthung ziemlich viel Wahrscheinlichkeit. Noch erhöht wird diese, wenn wir wahrnehmen, mit welchem Erfolg gerade die Geometer, welche sich am tiefsten in Newton's Arbeiten eingelebt haben, das Parallelogramm als Instrument handhaben. Auf diese Leistungen werden wir nunmehr näher einzugehen haben.

Bemerkt ward bereits (§. 4.), dass unter den unmittelbaren Nachfolgern des Meisters das Parallelogramm in die Geometrie eingeführt wurde, wie denn besonders Stirling mit Hülfe desselben die Kurven dritter Ordnung bearbeitete und auch wirklich Newton's Klassifikation derselben in einigen Punkten verbesserte[30]). In seine Fusstapfen trat De Gua, dessen selbstständiges Werk hauptsächlich der Vervollkommnung des instrumentalen Verfahrens gewidmet war[31]). De Gua stellt dasselbe mit Recht ungemein hoch; bei einer anderen Gelegenheit[32]) nennt er es „*l'excellente règle connue sous le nom de Règle du Parallélogramme, et au moyen de laquelle Newton assigne en suites infinies toutes les racines d'une Equation quelconque*". Doch begnügte er sich nicht, die von Newton überkommenen Verhaltungsmassregeln einfach zu adoptiren, sondern er änderte den ganzen Mechanismus um in der Weise, wie wir diess bereits früher (§. 4.) andeuteten und sofort genauer zu besprechen haben werden. Seine Modifikation fand vielen Anklang bei seinen Landsleuten, ungleich geringeren in Deutschland. So moquirt sich beispielsweise Kästner über das günstige Urtheil, welches Cramer in Betreff dieser Neuerung gefällt hatte, also darüber: „dass er ein Ding auf die Spitze gestellt hat, das bisher auf einer Seite gestanden hat"[33]). Es

29) *Kästner*, S. 475. 30) *Chasles*, S. 142. 31) *De Gua, Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul differentiel les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris 1740.
32) *Id. Recherches du nombre des racines réelles ou imaginaires, qui peuvent se trouver dans les Equations de tous les degrés*, Mém. de l'acad. royale des sciences, 1744. S. 456. 33) *Kästner*, S. 142.

wird wohl nicht geleugnet werden können, dass der praktische Sinn der Franzosen hier ein Hülfsmittel geschaffen hat, gegen welches man in Deutschland, da man ja allenfalls auch ohne dasselbe auszukommen vermochte, sich ablehnend verhalten zu müssen glaubte.

§. 10. Alles, was frühere Arbeiter auf diesem Gebiete Neues geschaffen hatten, nahm Gabriel Cramer in sein klassisches Werk über die algebraischen Kurven auf, welches auch in vielen anderen Richtungen bahnbrechend gewirkt hat; verdanken wir ihm doch, wie wir diess an einem andern Orte darlegten [34]), auch die erste praktisch verwendbare Idee von den Determinanten. Diese Stellung Cramer's giebt uns das Recht, uns lediglich an ihn zu halten, und eine genaue Analyse seiner Schrift überhebt uns der Mühe, uns bei Stirling, de Gua etc. länger aufzuhalten.

Unmittelbar nach Erörterung der Thatsache, dass die Ordnung einer Kurve von der Wahl des Koordinatensystems völlig unabhängig sei und durch die Vertauschung derselben ungeändert bleibe, folgt die Beschreibung des Newton'schen Parallelogramms [35]). *„Mais comme dans cette disposition les termes d'un même dégré se trouvent placés en diagonale, Mr. De Gua en tournant le Parallélogramme, lui a donné une situation plus commode. Il se présente alors comme un triangle, dont la pointe regarde en embas, et où les termes de l'équation générale sont placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la chose suffisament.“* Die gemeinte Figur ist diese:

$$\begin{array}{ccccc} my^4 & nxy^3 & ox^2y^2 & px^3y & qx^4 \\ & gy^3 & hxy^2 & ix^2y & lx^3 \\ & & dy^2 & exy & fx^2 \\ & & & by & cx \\ & & & & a. \end{array}$$

Diess ist der nun immer wiederkehrende *„triangle algébrique ou analytique“*; der unmittelbar in die Augen springende Vortheil dieses Arrangements ist der, dass sämmtliche Terme ein und derselben Horizontalreihe homogen sind. Schräge Linien,

34) *Günther*, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875. S. 4 ff. 35) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, A Genève, 1750. S. 55.

welche ausschliesslich gleiche Potenzen ein und derselben Veränderlichen in sich aufnehmen, werden als „*bandes*“ angeführt.

An dieser Stelle wird das analytische Dreieck lediglich zur besseren Versinnlichung der Glieder gebraucht, welche in der allgemeinen homogenen Gleichung vom $n$ten Grade zwischen zwei Variablen auftreten müssen; als Hülfsmittel zum Auffinden neuer Wahrheiten erscheint es hier noch nicht. Auch an einer anderen Stelle spielt es nur eine untergeordnete Rolle, da nämlich, wo von des Abbé Bragelogne (bekannt durch seine Durchmusterung der biquadratischen Kurven[36]) „*Contre-Diamètre*“ die Rede ist — unter einer solchen Bezeichnung versteht man einen Durchmesser, welcher zusammen mit dem darauf senkrecht stehenden die Kurve in vier kongruente Theile theilt*). Um nämlich an einer gegebenen Gleichung sofort zu erkennen, ob sie eine solche Kurve repräsentire, ordnet man ihre sämmtlichen Glieder in's arithmetische Dreieck ein und sieht zu, ob gewisse Horizontalreihen ganz weggefallen sind. Aber das drehbare Lineal, das Charakteristische des Newton'schen Verfahrens, findet auch hier[38]) noch keine Stelle.

Wir stossen auf dasselbe zuerst im 7. Kapitel, betitelt[39]): „*Détermination des plus grands termes d'une équation. Principes de la Méthode des Séries ou Suites infinies*“.

Hier müssen wir uns zuerst Rechenschaft darüber ablegen, wie der rein analytische Vorwurf mit geometrischen Dingen zusammenhängt. Es handelt sich um die sogenannten „unendlichen Aeste“ der Kurven, deren Anzahl, Beschaffenheit und Lage die Eintheilung jener in Geschlechter und Arten bestimmt. Unter Beschaffenheit *(espèce)* des Kurvenzweiges ist im Wesentlichen die Aehnlichkeit zu verstehen, welche zwischen der krummen Linie und einer Hyperbel oder Parabel obwaltet; man spricht so von hyperbolischen und parabolischen Aesten, je nachdem endliche oder die unendlich entfernte Gerade als

*) Wir verweisen bezüglich des interessantesten Falles solcher „Gegendurchmesser“ auf eine früher publizirte Abhandlung, in welcher speziell „Figuren“ (im eigentlichen Sinne) behandelt werden, denen eine derartige Eigenschaft zukommt[37]).

36) *Chasles*, S. 148. 37) *Günther*, Ueber einige Probleme der höheren Geometrie, Archiv d. Math. u. Phys. 55. Band. S. 163 ff. 38) *Cramer*, S. 141 ff. 39) *Ibid.* S. 148.

Asymptoten auftreten. Um diese Aeste zu diskutiren, stellt man folgende Betrachtung an. Gegeben ist eine gleich Null gesetzte algebraische Funktion zweier veränderlichen Grössen: wird eine derselben bezüglich unendlich gross oder unendlich klein angenommen, so werden gewisse Glieder alle übrigen unverhältnissmässig überragen. Diese letzteren dürfen aus bekannten Gründen vernachlässigt werden, und die Gleichung wird einfacher. Diese überwiegenden Glieder herauszufinden, ist die nächste Aufgabe — man sieht, dass bisher in nichts von dem Gedanken abgewichen ist, welcher auch Newton (s. o. §. 1.) bei einer analogen Ueberlegung leitete. Um die geometrischen Beziehungen klar zu übersehen, müssen wir auch diese, von der Kästner'schen Behandlungsart mehrfach abweichenden analytischen Prämissen Cramer's kennen lernen.

§. 11. Es kommt auch hier natürlich vorzugsweise auf zwei Dinge an: der Gebrauch des Parallelogramms muss streng begründet und verallgemeinert werden. Wir sahen, dass Newton nicht den ganzen Nutzen aus seiner Erfindung zog, den sie zu gewähren vermochte, sondern seinen Nachfolgern noch eine ziemliche Ausbeute überliess. Diese beiden von ihm auszufüllenden Desiderate deutet Cramer[40]) selbst mit den Worten an: *„La vraye Méthode des Séries est fondée sur le Parallélogramme de Mr. Newton, invention excellente, mais dont l'Auteur n'a pas donné la Démonstration, dont il semble même n'avoir pas senti tout le prix"*.

Der Beweis Cramer's, welcher ebenfalls mit ziemlicher Breite vorgetragen wird, kann natürlich in der Hauptsache von demjenigen Kästner's nicht abweichen. Wir gehen deshalb gleich dazu über, die mechanische Handhabung zu betrachten, welche Cramer der Newton'schen substituirt hat. Sein praktischer Sinn kennzeichnet sich gleich in dem Rathe[41]), ein materielles Dreieck mit passenden Durchbohrungen sich anzuschaffen, welches dann das jedesmalige Hinzeichnen des Triangels entbehrlich mache. Fassen wir seine Anweisung kurz zusammen, so gelangen wir zu einer Formulirung, welche wir im Anschluss an die von Clebsch in seinen Vorlesungen darüber gegebenen Notizen kurz bezeichnen als die

Cramer'sche Regel. Man ordne die vorkommenden Kombi-

40) *Cramer*, S. XVI. 41) *Ibid.* S. 165.

nationen der Potenzen von x und y in das analytische Dreieck ein, nehme den Potenzpunkt von y, welcher der Spitze zunächst liegt, und denke sich um denselben die betreffende Dreieckseite drehbar. Nach einer gewissen Drehung ist die bewegte Gerade in eine neue Lage gekommen, auf welcher mehrere markirte Punkte liegen; den entferntesten mache man zum Anfangspunkte einer neuen Drehung und setze dies fort, bis sämmtliche markirte Punkte auf dem Umfang oder im Innern eines geschlossenen Polygons liegen, welches ausschliesslich ausspringende Winkel besitzt.

Bis hierher ist Cramer's Regel nur der Form nach von den uns schon bekannten Regeln verschieden, der nun kommende Zusatz ist formell wie materiell neu und bedeutsam. Um ihn aber als solchen zu erkennen, muss man erst wissen, was Cramer unter *„Déterminatrice supérieure"* und *„inférieure"* versteht. Gerade bei dieser Gelegenheit fehlt seiner Definition die sonstige rühmenswerthe Klarheit, und wir geben deshalb folgende von seinem Wortausdruck ziemlich abweichende Nacherklärung:

Ist das analytische Dreieck vollständig ausgefüllt, so ziehe man als Begrenzungslinie desselben die letzte Horizontale, auf welcher noch markirte Punkte gelegen sind. Hiedurch ist die Möglichkeit gegeben, für jede der beiden anderen Seiten, welche wir hinfort als x- und y-Axe unterscheiden wollen, die oberen und unteren Begrenzungslinien zu finden. Man hebe nämlich auf der Horizontalen und auf der anderen Axe diejenigen beiden Punkte heraus, welche den beiden Endpunkten der ersten Axe zunächst liegen und verbinde sie durch eine Gerade. Durch diese Diagonale wird die Umfassungslinie des Polygons in zwei Theile getheilt, deren oberer die obere Begrenzungslinie repräsentirt. Um die andere ebenso abzugrenzen, zieht man von dem dem Anfangspunkte zunächst gelegenen Punkte der anderen Axe eine Diagonale zu jenem Eckpunkte des Polygons, welcher der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks zunächst liegt. Cramer's „Déterminatrice" ≡ „Begrenzungslinie".

Hierauf gestützt können wir nun dem erwähnten Cramer'schen Korollar nachstehende Formulirung ertheilen.

Durch Gleichsetzung je zweier an den Ecken des Polygons befindlicher Zahlen erhält man aus der ursprünglichen Gleichung eine Reihe anderer einfacherer. Durch die Annahme, dass entweder x oder y bezüglich unendlich gross oder unendlich klein wird, fallen gewisse dieser Gleichungen weg, und man sucht ein

Kriterium, um a priori zu erkennen, welche derselben erhalten bleiben. Ist x unendlich gross oder unendlich klein, so bestimmt man die oberen oder unteren Begrenzungslinien der y-Axe und lässt nur die durch jene gelieferten Gleichungen zu. Für y thut man das Nämliche nur mit Beziehung auf die x-Axe.

Wie einfach diese Regel sich anwendet, sehen wir am besten bei Durchführung eines von Cramer[42]) selbst gegebenen Beispiels. Gegeben ist die Gleichung

$$x^2y^2 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + d^2xy + e^2x^2 + f^3y = 0.$$

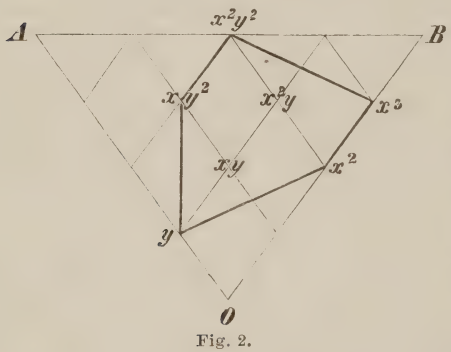


Fig. 2.

Man konstruire das Dreieck OAB, in welchem OB die x-, OA die y-Axe ist, und markire, wie in Fig. 2. geschehen, die der Gleichung entsprechenden Schnittpunkte. Lässt man dann das Lineal seine Drehungen machen, so entsteht das durch schärfere Auszeichnung hervorgehobene Vieleck, dem wir in unserem Falle diese fünf Gleichungen zu entnehmen haben:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && f^3y + axy^2 = 0;\\ &\text{II.} && axy^2 + x^2y^2 = 0;\\ &\text{III.} && x^2y^2 + cx^3 = 0;\\ &\text{IV.} && cx^3 + e^2x^2 = 0;\\ &\text{V.} && e^2x^2 + f^3y = 0. \end{aligned}$$

Dann kommen vier Unterfälle, zu deren Entscheidungen AB gezogen sein muss.

α) Es sei x unendlich gross. Es gelten die oberen Begrenzungslinien für die y-Axe, d. h. man hat die eine Gleichung

$$x^2y^2 + cx^3 = 0.$$

β) Es sei x unendlich klein. Es gelten die unteren Begrenzungslinien für die y-Axe, d. h. man hat die beiden Gleichungen

42) *Cramer*, S. 167.

$$f^3y + axy^2 = 0;$$
$$e^2x^2 + f^3y = 0.$$

γ) Es sei y unendlich gross. Es gelten die oberen Begrenzungslinien für die x-Axe, d. h. man hat die drei Gleichungen

$$axy^2 + x^2y^2 = 0;$$
$$f^3y + axy^2 = 0;$$
$$x^2y^2 + cx^3 = 0.$$

δ) Es sei y unendlich klein. Es gelten die unteren Begrenzungslinien für die x-Axe, d. h. man hat die beiden Gleichungen

$$cx^3 + e^2x^2 = 0;$$
$$e^2x^2 + f^3y = 0.$$

Dass im weiteren auch der andere Fall, wo auf einer Polygonseite mehrere markirte Punkte liegen, sorgfältig in Betracht gezogen wird[43]), versteht sich von selbst; die Reihenentwickelung erfolgt dann nach den nämlichen Prinzipien, welche wir in den vorigen Paragraphen bereits charakterisirt haben.

§. 12. Nunmehr kann die Frage nach dem Charakter eines Kurvenastes vorgenommen werden. Um sich zunächst klar zu werden, ob und was für unendliche Aeste der Kurve zukommen, bildet man das analytische Dreieck ihrer Gleichung und lässt aus letzterer die neuen Gleichungen hervorgehen, welche der Annahme $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \infty$ entsprechen. Oder aber, was im Grunde das nämliche ist; man entwickelt x oder y in eine nach fallenden Potenzen der anderen geordnete Reihe. Die Methoden, wie dies zu geschehen hat, sind bereits vollständig besprochen, und so erhält man die verschiedenen Zweige[44]). Wie deren geometrische Natur analytisch sich darstellt, erhellt aus Folgendem:

Wenn y der absteigenden Reihe

$$Ax^h + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \ldots$$

gleich ist, und man setzt die einzelnen Reihenglieder bezüglich gleich

43) *Cramer*, S. 169 ff. 44) *Ibid.* S. 215.

$$y,\ u,\ t,\ s\ \ldots,$$

so kommt alles auf den Ausdruck

$$\Sigma = y + u + t + s + \ldots$$

an, welcher imaginär, halb-imaginär oder reell sein kann.*) Man hat dann also drei Fälle zu sondern:

α) *Der Ausdruck Σ ist imaginär, dann gilt das Gleiche von dem Kurvenast. So oft also ein beliebiges Glied der p Reihen, welche das analytische Dreieck liefern mag, imaginär wird, so oft geht ein Kurvenast (wenigstens für die gewöhnliche Anschauung) verloren.*

β) *Der Ausdruck Σ ist halb-imaginär, dann entspricht einer (positiven oder negativen) unendlichen Abszisse eine reelle resp. imaginäre Ordinate. So oft also in einer der p möglichen Reihen halb-imaginäre Glieder auftreten, so oftmal verlaufen die unendlichen Aeste auf einer Seite der Ordinatenaxe.*

γ) *Der Ausdruck Σ ist vollständig reell. Dann liefert jede der p Reihen zwei zu beiden Seiten der y-Axe liegende Zweige.*

Mit Hülfe dieser Sätze kann also eruirt werden, ob unendliche Aeste vorhanden sind und wie sie sich im Allgemeinen vertheilen. Wie wir sahen (s. o. §. 10.), muss nun noch die nähere Beschaffenheit jedes Astes studirt werden, uud hierzu dient eine Regel, die wir, ihrer eigenthümlich-gedrungenen Form halber, in der Ursprache wiedergeben wollen. Sie heisst[46]):

„Quand on a la Série

$$Ax^h + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \ldots,$$

qui exprime l'ordonnée d'une Branche infinie, il est aisé de connoître si cette Branche est hyperbolique ou parabolique. Qu'on prenne tous les termes de cette Série, où l'exposant de x est positif où zéro, et

*) Zum besseren Verständniss eines sonst wenig gebrauchten Kunstwortes sei hier Cramer's eigene Definition[45]) gegeben: *„J'apelle demi-imaginaire une racine qui comme $\sqrt{ax}$ est réelle quand on prend x positive, et imaginaire quand on prend x negative; ou qui, comme $\sqrt{-ax}$, est imaginaire quand x est positive, et réelle quand x est negative“.* Die Grösse $\sqrt{-x^2}$ ist dagegen *„entièrement imaginaire“*, d. h. imaginär unter allen Umständen.

45) *Cramer*, S. 171. 46) *Ibid.* S. 230.

que leur somme soit nommée v. Si la Ligne dont x et v sont coordonnées est une Droite, la Branche de Courbe est hyperbolique et cette Droite est l'Asymptote. Au contraire, la Branche de Courbe est parabolique, si la Ligne, dont x est l'abscisse et v l'ordonnée, n'est pas une Droite".

Den besten Ueberblick über den Gebrauch der aufgestellten Regeln gewähren wieder Beispiele.

I. Zu untersuchen, ob und welche unendliche Aeste die durch die Gleichung

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axy^2 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$$

charakterisirte Kurve habe[47]).

Man bildet das analytische Dreieck und unterstreicht die in der Gleichung vorkommenden Termen. So erhält man:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{y^4} & xy^3 & \underline{x^2y^2} & x^3y & \underline{x^4} \\ & y^3 & \underline{xy^2} & x^2y & \underline{x^3} \\ & & y^2 & xy & \underline{x^2} \\ & & & y & x \end{array}$$

1.

Lässt man das Lineal seinen Umlauf machen, so erhält man drei Endgleichungen. Es soll zugesehen werden, welche derselben für den Fall eines unendlich grossen x noch bestehen bleiben, und hiezu muss die obere Begrenzungslinie gezogen werden. Dieselbe ist hier offenbar

$$y^4 - x^2y^2 - x^4,$$

und es resultirt sonach die einzige Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 0,$$
$$y = \pm x\sqrt{-1}.$$

Hier tritt Regel α) in Kraft: Es ist nur Eine absteigende Reihe vorhanden, diese ist imaginär, und demnach giebt es keine unendlichen Aeste.

II. Zu untersuchen, ob und welche unendliche Aeste die durch die Gleichung

$$xy^2 - a^2y - b^3 = 0$$

charakterisirte Kurve habe[48]).

47) *Cramer*, S. 239. 48) *Ibid.* S. 245.

Hier besteht folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccc} y^3 & \underline{xy^2} & x^2y & x^3 \\ & y^2 & xy & x^2 \\ & & \underline{y} & x \\ & & & \underline{1.} \end{array}$$

Aus diesem Schema ergiebt sich zunächst

$$xy^2 - a^2y = 0$$

als Gleichung des Zweiges, welcher durch Ziehung der oberen Begrenzungslinie für die x-Axe gewonnen wurde. Diess ist die Gleichung einer Hyperbel, und da wir bei der zugehörigen Reihenentwickelung auf ausschliesslich positive Glieder geführt werden, so tritt Fall γ) ein. Es existirt somit ein hyperbolischer Zweig im positiven, ein ebensolcher im negativen Koordinatenwinkel.

Die obere Begrenzungslinie für die y-Axe des Dreiecks liefert die Gleichung

$$xy^2 - b^3 = 0,$$

d. i. die Gleichung einer Hyperbel höherer (dritter) Ordnung.

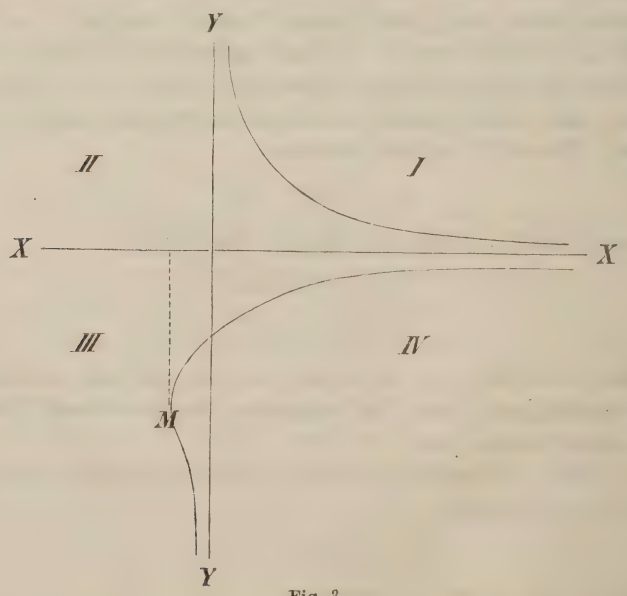


Fig. 3.

Auch hier gilt γ), und wir erhalten zwei bezüglich in Qua-

drant I. und IV. liegende hyperbolische Zweige. Die beiden ersten haben die Ordinatenaxe zur Asymptote, deren unendlich entferntem Punkte sie sich von entgegengesetzter Seite nähern, die beiden letzten liegen auf entgegengesetzter Seite der Abszissenaxe, deren unendlich entfernten Punkt sie gemein haben. Es entsteht so die in Fig. 3. dargestellte krumme Linie, deren negative Abszisse in M ein Maximum erreicht.

Der hier eingeschlagene Weg ist unmittelbar durch die früheren Vorschriften an die Hand gegeben. Allein durch die geeignete Deutung der verschiedenen Umfassungslinien des ins analytische Dreieck eingeschriebenen Polygons kann man noch schneller erkennbare Kriterien zur Entscheidung der Hauptfragen erlangen. So gelangt Cramer[49]) zu folgenden Theoremen, deren Eleganz ebenso gross ist, wie ihre praktische Verwendbarkeit:

I. Eine Begrenzungslinie im engeren Sinne (Determinatrix) ist nicht parallel zu einer der beiden Axen, sondern schneidet nur eine derselben oder geht durch den Anfangspunkt. Dann gilt Folgendes*):

α) *Liegen sämmtliche markirte Punkte zwischen dieser Geraden und der y-Axe, so werden dadurch hyperbolische Aeste angezeigt, welche die Abszissenaxe zur Asymptote haben.*

β) *Gilt das Nämliche, nur dass an Stelle der y- die x-Axe tritt, so vertauscht sich ebenso die Ordinaten- mit der Abszissenaxe.*

II. Eine Begrenzungslinie ist parallel einer der beiden Dreiecks-Axen.

Je nachdem diese Axe die Abszissen- oder Ordinatenaxe ist, ergiebt sich eine Parallele zur y- oder x-Axe als Asymptote mehrerer hyperbolischer Zweige. Man findet die zu den unendlich fernen Punkten der einen Axe gehörigen endlichen Punkte der anderen, wenn man die durch die Begrenzungslinie gelieferte Gleichung auflöst. Hat dieselbe die Wurzel Null, so fällt die Asymptote mit einer der Axen selbst zusammen.

*) Der eigenthümlich sich verschränkenden Terminologie müssen wir hier einige erklärende Worte widmen. Da wir stets mit zwei Systemen zu thun haben, dem natürlichen der Kurve und dem künstlichen des analytischen Dreiecks, so ward folgendes Auskunftsmittel getroffen:

Die Worte x- und y-Axe beziehen sich ausschliesslich auf das erste, die Worte Abszissen- und Ordinatenaxe dagegen auf das zweite System.

49) *Cramer*, S. 243, 261, 284, 308.

III. Die obere Begrenzungslinie schneidet die beiden Dreiecksaxen unsymmetrisch.

Alsdann erhält man eine oder mehrere Gleichungen von einer dieser beiden Formen

$$y = Ax^h, \; x = Ay^h.$$

Durch jede solche Gleichung wird im Allgemeinen eine Parabel höherer Ordnung, in unserem Falle also ein parabolischer Kurvenzweig repräsentirt.

Der Fall $h = 2$ würde einer zu beiden Axen symmetrischen Lage der Begrenzungslinie entsprechen; dieselbe schneidet ein gleichschenkliges Dreieck ab.

IV. *In diesem Falle wird eine Anzahl von Zweigen signalisirt, über deren Natur nur eine genauere Betrachtung orientiren kann. Man setzt in der Kurvengleichung*

$$y = Ax + u$$

und stellt die zugehörige Reihenentwickelung her; der Exponent des zweiten Gliedes dieser Reihe (von x) bestimmt die Natur der Kurve. Einem positiven entsprechen parabolische, einem negativen hyperbolische Aeste, deren Asymptoten jedoch nicht den Axen parallel sind, sondern eine durch die Gleichung

$$\varphi = \text{arc tg } A$$

gegebene Neigung gegen eine derselben besitzen. Im Falle, wo jener Exponent sich annullirt, gilt dies auch für φ.

Treten wir mit diesen Vorschriften ausgerüstet an unser obiges Problem heran, so sehen wir Folgendes: Wir haben die beiden Begrenzungslinien

$$y - xy^2 \text{ und } xy^2 - 1.$$

Eine derselben geht durch den Anfangspunkt, die andere schneidet die Ordinatenaxe, ohne der Abszissenaxe parallel zu sein. Ziehen wir I. α) und β) in Betracht, so entnehmen wir dem blossen Augenschein das, was uns sonst jene umständlichere Diskussion lehrte.

Hiermit glauben wir unseren Versuch, Cramer's Behandlungsweise der unendlichen Kurvenäste zu beleuchten, abschliessen zu dürfen. Er steht mit derselben unter seinen Zeitgenossen isolirt da — selbst Euler, der dem Gegenstande

seine eifrige Theilnahme widmet[50]), scheint vom Parallelogramm nichts zu wissen und behandelt den Gegenstand in einer Weise, welche freilich im Grunde auf das Nämliche hinauskommt, durch ihr Verschmähen eines ebenso einfachen wie ingenieusen Hülfsmittels jedoch lange nicht den vortheilhaften Eindruck macht, wie Cramer's Darstellung. Auch scheint man zu jener Zeit das Parallelogramm mehrfach zur Kontrole Euler's benützt zu haben; wenigstens erwähnt Kästner, „dass er durch solches den Beweis verschiedener allgemeiner die krummen Linien betreffenden Sätze suchte, die nöthig schienen, um von Herrn Euler's Vortrage, im II. B. der *Introd. in Analys. inf.* vollkommen überzeugt zu sein“[51]).

Von weiteren Bemühungen deutscher Mathematiker, sich in Cramer's Werk und in den Gebrauch des Parallelogramms einzuleben, haben wir nur eine recht gelungene Dissertation des schon oben angeführten Pfeiffer zu entdecken vermocht[52]), welche zu gewissen Partien in Cramer's Buche einen brauchbaren Kommentar liefert.

§. 13. Wie zahlreich sich in der Lehre von den algebraischen Kurven Gelegenheiten ergeben, durch eine Anwendung des Newton'schen Mechanismus komplizirte algebraische Rechnungen einfach zu koupiren, dafür dürfte unsere bisherige Untersuchung hinlängliche Belege darbieten. Allein noch ist, wenn wir bei Cramer stehen bleiben, diess Thema durchaus nicht abgeschlossen — im Gegentheile übrigt uns noch die Erörterung eines Punktes, welcher vom mathematisch-historischen Standpunkte aus besondere Würdigung verdient. Denn an ihn gerade hat die Forschung späterer Zeit wieder angeknüpft, diese Materie schlug die Brücke über einen Zeitraum von eigenthümlicherweise genau 100 Jahren. Im Jahre 1850 nahm Puiseux — freilich ohne Kenntniss des geschichtlichen Sachverhaltes und von wesentlich anderen Beweggründen geleitet — die Lehre von den vielfachen Kurvenpunkten da auf, wo sie Cramer anno 1750 gelassen hatte. Dieser Gegenstand soll uns nun auch hier beschäftigen.

Definition und primitive Bestimmungsweise mehrfacher

50) *Euler*, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michelsen, 2. Buch, Berlin 1788. S. 129 ff. 51) *Kästner*, S. 457. 52) *Pfeiffer*, *Dissertatio mathematica de curvarum algebraicarum asymptotis tam rectilineis, tam curvilineis, earumque investigatione*, Tubingae 1764.

Punkte einer Kurve gehen aus nachstehendem Satze Cramer's hervor[53]):

„Pour savoir si un Point assigné d'une Courbe est un Point multiple, et quel est le dégré de sa multiplicité; il faut examiner combien de fois une Droite quelconque, menée par ce Point-là, y rencontre la Courbe".

Als den, der zuerst diese Formulirung gab, bezeichnet Cramer selbst seinen Vorläufer De Gua[54]).

Analytisch aufgefasst, vollzieht sich diese Operation folgendermassen. Man setzt in der Kurvengleichung

$$f(x, y) = 0$$

statt y und x bezüglich su und $(z + ru)$, d. h. man verwandelt das ursprüngliche rechtwinkliche Koordinatensystem in ein schiefwinkliges, dessen Anfangspunkt der zu untersuchende Punkt ist, und dessen Abszissenaxe der ursprünglichen parallel läuft, während die Ordinatenaxe einen unbestimmten Winkel bildet. Die Grösse z kann aber, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, gleich Null genommen werden, und so kann man die transformirte Gleichung unmittelbar hinschreiben, indem man nur allgemein den Term

$$x^p y^q \text{ mit } r^p s^q$$

vertauscht und alle homogenen Glieder von der $t$ten Dimension noch mit u^t multiplizirt; die neue Gleichung erscheint so nach Potenzen von u geordnet. *„Et cette dernière équation indique par le nombre de ces racines en combien de points une Droite quelconque passant par l'Origine rencontre la Courbe."* Aber dieser Ursprung ist eben mit dem fraglichen Punkt identisch, und damit ist also die Aufgabe völlig absolvirt.

Es lässt sich nun auch wieder *a priori* erwarten, dass dem analytischen Verfahren ein mechanisches substituirt werden dürfe, welches auf den Eigenschaften des Newton'schen Parallelogramms beruht. Es bedarf nur des leicht zu überschenden Satzes[55]):

Der Anfangspunkt des neuen Systemes ist ebenso vielfach, als die Anzahl der Null-Wurzeln, welche der umgeänderten Gleichung genügen.

---

53) *Cramer*, S. 400. 54) *De Gua, Usage etc.* S. 88 ff. 55) *Cramer*, S. 410.

Nun wissen wir aber, dass bei der französischen Lage des Parallelogramms, oder, besser gesagt, des Dreiecks, alle homogenen Glieder auf ein und dieselbe Horizontale zu liegen kommen, und so fliesst aus dem Obigen denn eine in ihrer Einfachheit wahrhaft bewundernswürdige Regel:

Man bilde die transformirte Gleichung und ordne ihre Glieder in das analytische Dreieck ein, indem das, was bisher x und y war, nunmehr bezüglich r und s wird. Fehlen dann der Gleichung t nach den Dimensionen geordnete Gruppen (von der Dimension Null ab gerechnet), oder, was dasselbe ist, bleiben im Dreieck t horizontale Reihen (die Spitze mitgezählt) ganz unausgefüllt, so ist der Anfangspunkt des neuen Axensystems ein tfacher Punkt der Kurve.

Wir entnehmen Cramer's zur Illustrirung dieses Satzes vorgeführten Beispielen das folgende: Gegeben ist die Kurvengleichung [56]):

$$y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0.$$

Welchen Charakter trägt der Anfangspunkt? Um diess festzustellen, braucht es keine Koordinaten-Vertauschung, sondern man hat sofort das Dreieck:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{y^3} & & xy^2 & & \underline{x^2y} & & x^3 \\ & \underline{y^2} & & xy & & \underline{x^2} & \\ & & \underline{y} & & x & & \\ & & & 1. & & & \end{array}$$

Nur die Spitze ist nicht markirt; also ist jener Punkt ein einfacher.

Nunmehr aber werde eine Verschiebung des Systemes eingeführt, welche die neue Gleichung

$$y^3 + x^2y + ay^2 - ax^2 = 0$$

im Gefolge hat. Jetzt ist das Dreieck dieses:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{y^3} & & xy^2 & & \underline{x^2y} & & x^3 \\ & \underline{y^2} & & xy & & \underline{x^2} & \\ & & y & & x & & \\ & & & 1, & & & \end{array}$$

und demnach jener Punkt ein Doppelpunkt.

56) *Cramer*, S. 412.

Mit dieser Regel ist jedoch die Bedeutung des Parallelogramms für das Studium der vielfachen Kurvenpunkte noch nicht erschöpft. Diese Punkte sind nicht alle von gleicher Natur; vielmehr kann man unter denselben wieder verschiedene Klassen unterscheiden. Bleiben wir zunächst bei den Doppelpunkten stehen, so kann ein solcher ein *einfacher Knotenpunkt*[57]) sein, oder es kann ein mehrfacher Wende- oder Windungspunkt sein. Dabei wird die Bestimmung getroffen[58]), dass ein $2n$facher Wendepunkt *(point d'inflexion)* ein $n$facher Windungspunkt *(point de serpentement)* nach Maupertuis'[59]) Terminologie sei. Hierbei sind die Windungspunkte nur analytisch als ausgezeichnete Punkte charakterisirt, oder, wie Cramer (s. o.) sich ausdrückt: *„Les Inflexions sont alternativement visibles et invisibles"*. Uebrigens ist 4 die niedrigste Ordnungszahl, bei welcher solche Windungspunkte bereits erscheinen können.

Um nun gegebenenfalls einen Punkt auf seine speziellere Natur prüfen zu können, hebt man bei Doppelpunkten aus der Gleichung der Kurve die speziellere

$$M \equiv dy^2 + exy + fx^2 = 0$$

heraus, vorausgesetzt, dass jener Punkt bereits Ursprung des Systemes sei. Sind die Wurzeln dieser Gleichungen complex, so ist jener, wie bekannt, ein Einsiedler-Punkt. Sind dieselben andernfalls beide reell, aber ungleich, so setze man in der Kurvengleichung statt y nacheinander

$$Ax + u \text{ und } A'x + u,$$

unter Ax und $A'x$ jene beiden Wurzeln verstanden. So entsteht eine neue Gleichung von der Form

$$F(x, u) = 0,$$

in der nothwendig der Term ux vorkommen muss. Dann gilt der Satz[60]):

Man ziehe im analytischen Dreieck jener Gleichung die vom Punkte ux ausgehende Begrenzungslinie nach der Abszissen (x-) Axe. Ist x^t der von ihr darin getroffene Punkt, so ist der diskutirte Punkt ein $t$facher Wendepunkt.

Ist $A = A'$, so durchsetzen sich im doppelten Punkte die

57) *Cramer*, S. 569. 58) *Ibid.* S. 403. 59) *Maupertuis, Sur quelques affections des courbes*, Mém. de l'acad. 1729. S. 277. 60) *Cramer*, S. 570.

Zweige nicht, sondern man hat entweder einen Rückkehr- oder einen Osculationspunkt. Hier unterscheidet man in bekannter Weise zwischen Rückkehrpunkt erster und zweiter Art oder Spitze und Schnabel, ebenso zerfällt die zweite Gattung in eine „Osculinflexion“ und in eine „Embrassinflexion“. Auch diese sämmtlichen Spezialitäten fallen ins Bereich des Parallelogramms.

Die Bedingung, von der wir ausgehen, ist algebraisch diese:

$$y = -x\sqrt{\frac{f}{d}} = Ax.$$

Wir setzen die hierdurch angedeutete Reihe fort, indem wir $(Ax + u)$ statt y in der Gleichung substituiren. Dann bilden wir wieder das analytische Dreieck und bemerken, dass dem tiefstgelegenen Punkte, von dem sonach die „untere Begrenzungslinie“ ausgehen muss, der Term u^2 beigeschrieben sein wird. Nun aber kann im Allgemeinen Viererlei eintreten.

α) Die von jenem tiefsten Punkte ausgehende Begrenzungslinie trifft den Punkt x^3 — dann hat man es mit einer Spitze zu thun, wie bei der cubischen (Neil'schen) Parabel.

β) Jene Begrenzungslinie ist $u^2 - ux^2 - x^4$. Dann erhält man zwei Reihen für y, nämlich etwa

$$y = Ax + Bx^2 + \cdots; \quad y = A'x + B'x^2 + \cdots$$

Sind B und B' imaginär, so sind es auch, wie wir früher sahen, die dadurch repräsentirten Kurvenzweige. Sind sie reell aber ungleich, so besteht eine „Osculation“ oder ein „Embrassement“, je nachdem die Zeichen gleich oder verschieden sind. Sind sie reell, aber gleich, so wird das bisherige Verfahren illusorisch. Man setzt dann

$$u = Bx^2 + t$$

und sieht in dem neu konstruirten analytischen Dreieck zu, ob die von t^2 ausgehende Begrenzungslinie durch x^5 geht, wodurch ein Schnabel angedeutet würde. Wäre x^5 nicht markirt, so würde man ein drittes Reihenglied zu Hülfe zu nehmen und so fortzufahren haben.

γ) Hierher gehören die beiden Fälle, wo entweder die einzige „untere Begrenzungslinie“ $u^2 - x^5$ vorhanden ist, oder wo es folgende zwei giebt: $u^2 - ux^2$ und $ux^2 - x^5$. Je nachdem das eine

oder andere eintritt, hat man ein „Rebroussement à double Inflexion" oder eine „Osculinflexion".

δ) *Auch hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Sind zwei untere Begrenzungslinien vorhanden, welche resp. die beiden Anfangsgleichungen*

$$u = Bx^2, \quad u = B'x^4$$

liefern, so wird ein „Embrassement" oder eine „Osculation" gekennzeichnet, je nachdem B und B' gleiche oder verschiedene Vorzeichen besitzen. Es kann aber auch sein, dass nur eine einzige untere Begrenzungslinie existirt, welche eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln

$$u = Bx^3, \quad u = B'x^3$$

ergiebt. Je nach der Beschaffenheit dieser Wurzelwerthe bedarf es einer genaueren Diskussion, welche im Wesentlichen von β) nicht abweicht.

Untersuchen wir mit diesen Hülfsmitteln die Kurve der Gleichung[61])

$$a^3y^2 - 2abx^2y - x^5 = 0;$$

der fragliche Punkt ist hier bereits Anfangspunkt, und so kann man unverzüglich das analytische Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} y^5 & xy^4 & x^2y^3 & x^3y^2 & x^4y & \underline{x^5} & \\ y^4 & xy^3 & x^2y^2 & x^3y & x^4 & & \\ y^3 & xy^2 & \underline{x^2y} & x^3 & & & \\ \underline{y^2} & xy & x^2 & & & & \\ y & x & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{array}$$

bilden. Man erhält die beiden unteren Begrenzungslinien

$$y^2 - x^2y \text{ und } x^2y - x^5;$$

es tritt der in γ) charakterisirte Fall ein, und man hat sonach im Ursprung des Systems eine Berührungsinflexion.

Ganz entsprechende Regeln werden nun weiterhin für höhere vielfache Punkte mit peinlichster Akribie zusammengestellt. Auf sie einzugehen dürfen wir uns hier versagen, einmal, weil das allgemeine Verfahren von Cramer selbst nicht eigentlich formulirt, sondern in einer Fülle von Einzelfällen vorgetragen

61) *Cramer*, S. 595.

wird, dann aber auch, weil wir jetzt zu Puiseux' alles Bisherige zusammenfassender Methode überzugehen haben. Auf die hier obwaltende unbewusste Beziehung zwischen beiden Mathematikern hat Clebsch, wie dies oben (§. 1.) schon erwähnt wurde, mit den Worten hingewiesen: „So findet sich bei Cramer schon die später von Puiseux gegebene Regel, nach welcher man diejenigen Gliedergruppen der Kurvengleichung bildet, welche in einem singulären Punkte von gleicher Ordnung werden können".

§. 14. Im Eingang des vorigen Paragraphen ward schon bemerkt, dass gerade ein Jahrhundert nach Cramer der uns hier beschäftigende Gegenstand von einer ganz anderen Seite her in Angriff genommen wurde. Während nämlich Cramer, nachdem er sich von dem vielfältigen Nutzen des Newton'schen Parallelogramms bei geometrischen Untersuchungen überzeugt hatte, demselben in seiner Arbeit eine gewissermassen prinzipielle Stellung zuwies, tritt dasselbe bei Puiseux, den ausschliesslich funktionstheoretische Absichten leiteten, blos als gelegentlicher Kunstgriff auf, und es bedurfte des weittragenden Blickes von Clebsch, um die historisch wie sachlich universelle Bedeutung desselben hervortreten zu lassen.

Puiseux ist bekanntlich sowohl chronologisch wie auch geistig einer der unmittelbarsten Vorläufer Riemann's, und in seiner berühmten Abhandlung[62]) über die algebraischen Funktionen hat er zuerst die ursprünglich auf Cauchy zurückzuleitende Idee durchgeführt, den Weg einer komplexen Funktion auf der Zahlenebene zu studiren und darzuthun, dass nicht auf sämmtlichen Wegen der gleiche Endwerth erreicht wird. Im zweiten Theile jener Arbeit wird speziell untersucht, welche Aenderungen sich ergeben, wenn zwei gleichen Anfangs- und Endpunkt besitzende Kurvenzweige in einander übergeführt werden sollen, zwischen die ein *„point singulier"* Cauchy's[63]), d. h. ein Verzweigungs- oder Windungspunkt Riemann's[64]) fällt. Die Funktionsgleichung möge

62) *Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques*, Journ. de mathém. pures et appliqu., Tome XV. S. 365 ff. 63) *Cauchy, Exercises de l'analyse et de physique mathématique*, Tome IV, Turin 1839. S. 327. 64) *Riemann*, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse, Göttingen 1851. S. 5.

$$f(u, z) = 0$$

sein, und es werde vorausgesetzt, dass die aus dieser Gleichung berechneten Werthe von u für endliche Werthe von z nicht unendlich werden können[65]). In einem bestimmten Punkte der Zahlenebene, in welchem $z = a$ wird, nehmen p Wurzeln jener Gleichung den gemeinschaftlichen Werth b an. Wir beschreiben um jenen ersten Punkt A (Fig. 4.) eine Elementarkontur CLM und verstehen unter $u_1, u_2 \ldots u_p$ die p Funktionen von z, welche der Gleichung

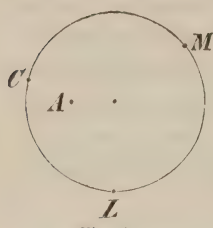


Fig. 4.

$$f(u, z) = 0$$

genügen und sich für den Anfangspunkt C auf p nahezu gleiche Wurzeln der Gleichung

$$f(u, c) = 0$$

zusammenziehen. Der bewegte Punkt Z beschreibt einmal jene Elementarkontur, und die der ersten Gleichung Genüge leistenden Funktionen von z, welche im Anfangspunkte der Bewegung bis auf unendlich kleine Grössen mit den einfachen Wurzeln der Gleichung

$$f(u, a) = 0$$

übereinstimmten, erlangen ihre Anfangswerthe wieder. Es soll nun das Verhalten jener Grössen u untersucht werden, zunächst unter der Voraussetzung, dass für $z = a$, $u = b$ der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

nicht verschwindet. Ist dies der Fall, so behauptet Puiseux[66]):

„Les fonctions u_1, $u_2 \ldots u_p$, qui deviennent égales à b au point A, peuvent être rangées sur un cercle de façon qu'après une révolution de Z sur un contour infiniment petit tracé autour du point A, la valeur finale de chacune d'elles soit égale à la valeur initiale de la suivante".

Für uns jedoch hat der andere Fall ein spezielles Interesse, in dem jener Differentialquotient verschwindet, und zu ihm wollen wir uns also jetzt wenden.

65) *Puiseux*, S. 384. 66) *Ibid.* S. 387.

§. 15. In der Gleichung ($f = 0$) setzen wir

$$u = b + \beta, \quad z = a + \alpha$$

und führen dieselbe so auf die Form über

$$f(b + \beta,\ a + \alpha) = A\beta^p + \Sigma B \beta^q \alpha^r = 0,$$

„le signe Σ désignant une somme de termes dans lesquels les exposants q et r sont entiers et positifs; dans les termes où r est nul, q est plus grand que p, et il y a nécessairement un terme au moins où, q étant nul, r ne l'est pas“[67]).

Es soll dann Folgendes geleistet werden:

In der transformirten Gleichung sollen die Glieder niedrigster Dimension separirt werden — eine Aufgabe, deren Analogie mit jenen, welche die Anwendung des Parallelogramms erfordern, sofort in die Augen fällt.

Wir zerfällen das rechtsstehende Polynom in zwei Theile A und A', so dass die Identität

$$A\beta^p + \Sigma B \beta^q \alpha^r = A + A'$$

zu Stande kommt. In der ersten Gruppe A befinden sich blos Glieder von der Beschaffenheit, dass, wenn man sie nach absteigenden Potenzen von β ordnet, die zugehörigen Exponenten von α nothwendig steigen müssen. Bestehen sonach die Ungleichungen

$$p > p_1 > p_2 \cdots > p_{i-1},$$
$$q_1 < q_2 < q_3 \cdots < q_i,$$

so wird

$$A = A_0\beta^p + A_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1} + A_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2} + \cdots + A_i\alpha^{q_i}$$

gesetzt werden dürfen. Dann lässt sich die obige Frage folgendermassen schärfer präzisiren:

„Dans le polynome A, choisir de toutes les manières possibles un groupe de deux ou de plusieurs termes tels, qu'en y regardant α comme un infiniment petit du premier ordre et β comme un infiniment petit d'un ordre convenable, ces termes soient d'un même ordre inférieur à celui de tous les autres termes du polynome. Quand on aura trouvé tous ces groupes, on formera, en les égalant à zéro, des équations dont chacune déterminera approximativement une ou plusieurs des p valeurs infiniment petites de β“[68]).

67) *Puiseux*, S. 386. 68) *Ibid.* S. 389.

Ist nun β eine unendlich kleine Grösse der μten Ordnung, so mögen etwa das $(f+1)$te und $(g+1)$te Glied — deren Coëfficienten sonach bezüglich A_f und A_g sind — von gleicher Dimension sein; dann gilt offenbar die Relation

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

und, wenn h ein von f und g verschiedener Werth ist,

$$\mu p_h + q_h \geqq \mu p_f + q_f.$$

Diesen Beziehungen lässt sich nun eine sehr übersichtliche Form dadurch ertheilen, dass man p und q als rechtwinklige Koordinaten auffasst oder, um in unserer Sphäre zu verharren, dadurch, dass man die verschiedenen Zahlpunkte in Form des Newton'schen Parallelogramms anschreibt. Es liegt dann der Punkt M_0 (Fig. 5.) auf der x-, der Punkt M_i auf der y-Axe, während dem Punkte M_k die Koordinaten p_k und q_k zukommen. Die oben gesetzte Bedingung über das Verhalten der Potenzen von α und β lässt auch sofort erkennen, dass eine zwei willkürliche Punkte M_f und M_g verbindende Gerade beide Axen in ihren positiven Theilen trifft.

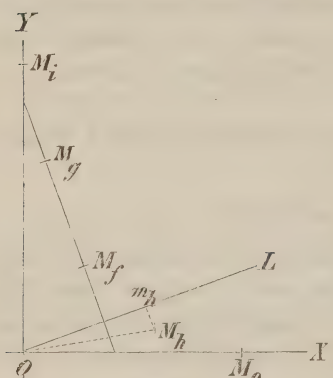


Fig. 5.

Nunmehr mache man $\sphericalangle LOX = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\mu}$ und ziehe OM_h, sowie $M_h m_h$ senkrecht auf OL. Dann folgt

$$Om_h = \frac{\mu p_k + q_k}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

und behält der kleine Buchstabe m seine Bedeutung bei, so folgt aus der obigen Grundgleichung

$$Om_g = Om_f,$$

mit anderen Worten: die Geraden $M_f M_g$ und OL stehen senkrecht zu einander, ebenso ist weiter

$$Om_h \geqq (Om_g = Om_f).$$

Aus dieser Betrachtung erwächst nachstehende einfache Regel zur Aussiebung*) der einzelnen Gruppen[69]):

Man bestimme alle Punkte M_k der Zahlenebene, deren rechtwinklige Koordinaten bezüglich p_k und q_k sind. Dann mache man den der X-Axe angehörigen ersten Punkt zum Drehpunkt einer Geraden, deren Anfangslage mit jener Axe zusammenfällt, und lasse die Gerade eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers machen solange, bis sie durch einen oder mehrere der verzeichneten Punkte hindurchgeht. Den entferntesten derselben nehme man nunmehr zum Drehpunkt und fahre so fort, bis der auf der Y-Axe zunächst am Anfangspunkt gelegene Punkt erreicht ist. Alle der nämlichen

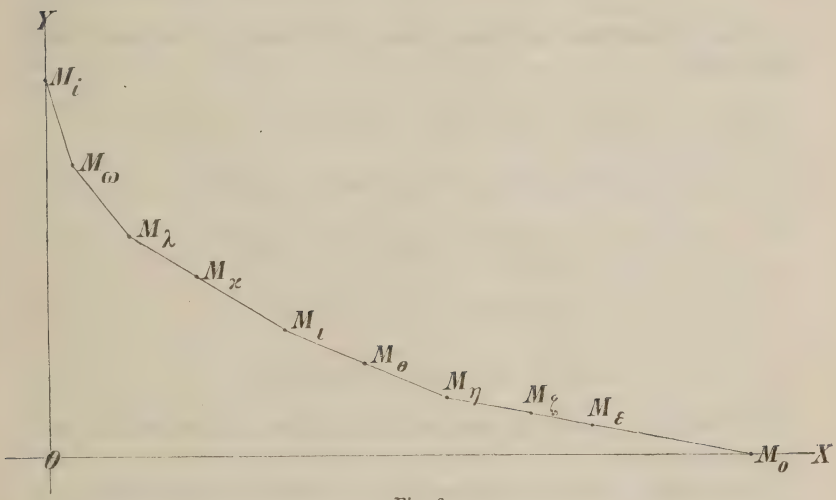


Fig. 6.

Umfangsseite des so entstandenen gebrochenen Linienzuges angehörigen Punkte gehören der nämlichen Gruppe an.

Der blosse Wortlaut lässt erkennen, dass wir in der That berechtigt waren, die oben (§. 11.) statuirte Cramer'sche Regel in der Kapitel-Ueberschrift als Cramer-Puiseux'sche Regel zu bezeichnen.

---

*) Diese Bezeichnung für das bei Bestimmung der zusammengehörigen Glieder vorzunehmende Geschäft scheint gerechtfertigt, weil wirklich eine recht schlagende Analogie mit dem bekannten „κόσκινον" des Eratosthenes obwaltet.

---

69) *Puiseux*, S. 391.

Nehmen wir zur näheren Erläuterung das von Puiseux selbst gegebene Beispiel vor. Der Drehpunkt fällt zuerst auf M_0 (Fig. 6.) und man erhält als erste Grenzlage der drehbaren Geraden diese:

$$M_0 - M_\varepsilon - M_\zeta - M_\eta .$$

Letzterer Punkt wird nunmehr Pivot, und man erhält weiter

$$M\eta - M_\vartheta - M_\iota$$

und als die drei letzten Lagen

$$M_\iota - M_\varkappa - M_\lambda ; \quad M_\lambda - M_\omega ; \quad M_\omega - M_i .$$

So bekommen wir aus dem Polynom A folgende fünf Gruppen:

$$G_1 = A_0\beta^{p_0} + A_\varepsilon\beta^{p_\varepsilon}\alpha^{q_\varepsilon} + A_\zeta\beta^{p_\zeta}\alpha^{q_\zeta} + A_\eta\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta};$$

$$G_2 = A_\eta\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta} + A_\vartheta\beta^{p_\vartheta}\alpha^{q_\vartheta} + A_\iota\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota};$$

$$G_3 = A_\iota\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota} + A_\varkappa\beta^{p_\varkappa}\alpha^{q_\varkappa} + A_\lambda\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda};$$

$$G_4 = A_\lambda\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda} + A_\omega\beta^{p_\omega}\alpha^{q_\omega};$$

$$G_5 = A_\omega\beta^{p_\omega}\alpha^{q_\omega} + A_i\beta^{p_i}\alpha^{q_i}.$$

Das Endglied jeder Einzelgruppe ist das Anfangsglied der nächstfolgenden.

Nunmehr hat man sämmtliche Gruppen; wie aber verhalten sich dieselben betreffs ihrer Dimensionen? Diess geht aus der geometrischen Entstehung der Gruppen unverzüglich hervor; denn da der Linienzug (in unserem Falle $M_0 M_\iota$) gegen den Ursprung konvex ist, so resultirt eine Reihe von Ungleichungen, die hier so zu schreiben sein würden:

$$\frac{q_\eta}{p_0 - p_{\eta_1}} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \cdots < \frac{q_i - q_\omega}{p_\omega}.$$

Daraus schliesst man aber weiter, dass, für $R > S$, die in der Gleichung

$$G_R = 0$$

stehenden unendlich kleinen Werthe von β eine geringere Dimension haben werden, als die in der Gleichung

$$G_S = 0$$

vorkommenden.

Mit Hülfe dieser Trennungsregel wird nun die fernere Untersuchung durchgeführt, die in dem Satze gipfelt[70]):

„*Les diverses fonctions* u_1, $u_2 \ldots u_m$ *qui satisfont à l'équation*

$$f(u, z) = 0$$

peuvent toujours se partager, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires".

Was unter einem solchen Kreis-Systeme zu verstehen sei, ward bereits früher gesagt, und es möge nur noch angedeutet werden, dass der Zusammenhang dieses Theorems mit den geschilderten Voruntersuchungen darin besteht, dass eben die Anzahl dieser Systeme mit der Anzahl der durch das Parallelogramm zu erhaltenden Gruppen identisch ist.

Wir glauben durch unsere nunmehr vollendete Uebersicht über Puiseux's Leistungen auch unseren früheren Ausspruch gerechtfertigt zu haben, dass sein Verfahren ein alles Vorhergegangene umfassendes sei; insbesondere gilt diess auch von seiner ebenso präzisen als eleganten Beweismethode*). Nur eine einzige Ergänzung haben wir noch anzufügen; denn Puiseux

*) Aus unserer Darstellung wird wohl mit hinlänglicher Deutlichkeit hervorgehen, wieviel Neues auf Puiseux im Gegensatz zu seinen Vorgängern zurückzuführen ist. Wir sagen diess mit besonderer Bezugnahme auf die hie und da sich findende historisch nicht berechtigte Meinung, als ob der französische Gelehrte eine ganz unvorbereitete Entdeckung resp. Erfindung gemacht habe. Wenn es z. B. in einem ganz neuerlich erschienenen Schriftchen von Braun[71]) heisst, man bilde die Gruppen „vermittelst der von Puiseux in Liouville's Journal bewiesenen, aber schon von früheren Mathematikern häufig benutzten Regel", so muss dem entgegengetreten werden. Man könnte eher so sagen: Bewiesen ward die Regel schon mehrfach (s. o. §. 4.), jedoch in der elegantesten und zugleich einfachsten Weise zuerst von Puiseux. Allein auch diese Fassung dürfte dem geschichtlichen Sachverhalte sich nicht ganz konform erweisen, wie uns die in Note I diskutirte Behandlungsweise Taylor's zeigen wird. Uebrigens muss die eben zitirte Arbeit von Braun auch ausserdem berücksichtigt werden: Sie giebt eine Anzahl praktischer Anwendungen der Regel (allerdings nur für den einfachsten Fall, wo der zwischen den Axen ausgespannte Linienzug in eine Hypotenuse degenerirt) und wird uns auch zu Paragraph 15 einige nicht uninteressante Notizen liefern.

70) *Puiseux*, S. 397. 71) *Braun*, Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelkurven, Erlangen 1875. S. 30.

verfährt ausschliesslich als Funktionstheoretiker*), während bei allen anderen bisher aufgeführten Mathematikern geometrische Zwecke mehr oder weniger die Anwendung des Parallelogramms bedingen. Dieser nur scheinbare Widerspruch soll nun im Folgenden endgültig gehoben werden.

§. 15. Wenn wirklich Cramer's und Puiseux's Darstellungen prinzipiell auf das Gleiche herauskommen sollen, so muss offenbar zwischen Geometrie und Funktionslehre ein

*) Eine einzige nicht geometrische, sondern rein analytische Anwendung des Parallelogramms scheint sich auch im vorigen Jahrhundert nachweisen zu lassen, und zwar bei Lagrange. Merkwürdigerweise scheint dieselbe ganz unbeachtet geblieben zu sein; nur Lacroix[72]) und De Morgan (in einem Nachtrag zu einem Aufsatz über die Minding'sche Eliminationsmethode[73])) erwähnen ihrer überhaupt[74]). Lagrange[75]) also kannte das Parallelogramm, aber seiner streng methodischen universellen Anschauung mochte es nicht gefallen haben. Er stellt nämlich die zu lösende Aufgabe ganz in der uns nun schon genugsam bekannten Weise auf und bemerkt, dass zwei Lösungsarten dafür sich angeben liessen, fügt dann aber bei: „*Mais comme la méthode du premier demande une espèce de construction géométrique, et que celle du second dépend du parallélogramme de Newton, et par conséquent ne peut être regardée comme une méthode mécanique, je crois que les Géomètres seront bien aisés de voir comment on peut résoudre cette question par une méthode purement analytique*". Den hier gegebenen Rath befolgt Lagrange[76]) selbst, und in der That lässt sich sehr wohl ein solches rein analytisches Verfahren denken. So hat ja auch Hamburger[77]) die Resultate von Puiseux in ein von geometrischer Anlehnung ganz losgelöstes Gewand gekleidet.

Der Grund, warum Lagrange's Abhandlung (wie übrigens manches andere, vergl. Kapitel II. §. 16.) fast ganz vergessen wurde, dürfte wohl aus ihrem Sujet herzuleiten sein. Der grosse Analytiker sucht nämlich darin Differentialgleichungen mit Hülfe der Kettenbrüche aufzulösen, allein diess Verfahren ist, wie Stern[78]) meint, „der längst bekannten Methode, die dasselbe durch unendliche Reihen leistet, nicht vorzuziehen". Mit dem Ziel der ganzen Arbeit vergass man aber auch ihre Einzelheiten.

72) *Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome III., Paris 1800. S. 223. 73) *De Morgan, On the dimensions of the roots of equations*, Quarterly Journal of pure and applied mathematics, Vol. I., S. 1 ff. 74) *Id. Historical note on the theorem respecting the dimensions of roots*, Ibid. S. 233 ff. 75) *Lagrange, Mém. de Berlin* 1776; *Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. J.-A. Serret*, tome IV., Paris 1869. S. 304. 76) *Ibid.* S. 307. 77) *Hamburger*, Ueber die Entwickelung algebraischer Funktionen in Reihen, Zeitschrift f. Mathem. u. Phys. 16. Jahrg. S. 461 ff. 78) *Stern*, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 11. Band. S. 350.

sehr inniger, von jenen Autoren selbst wenigstens nur sehr undeutlich gefühlter Zusammenhang bestehen. Suchen wir uns *a priori* über diesen Zusammenhang Klarheit zu verschaffen, so muss, wofern anders unsere bisherigen Behauptungen sämmtlich ihre Geltung behaupten sollen, derselbe durch folgenden Satz gegeben sein:

Die Lehre von den m blättrigen Riemann'schen Flächen deckt sich mit der höheren Kurventheorie insofern, als ein m facher Verzweigungspunkt mit einem vielfachen Kurvenpunkt identisch ist, in welchem m Aeste zusammenlaufen.

Wenn diess der Fall, so ist den Riemann'schen Flächen ihr unanschaulicher Charakter genommen, und das Studium der auf jenen Hülfsgebilden ausgebreiteten Funktionen deckt sich mit der analytischen Geometrie von zwei rechtwinkligen Koordinaten. Dass es aber wirklich der Fall ist, haben neuere Forschungen zur Evidenz dargethan.

Angebahnt ward diese Verschmelzung zweier ganz verschiedener Disziplinen bereits in dem epochemachenden Werke von Clebsch-Gordan[79]). In der bekannten Biographie[80]) des Erstgenannten wird darauf hingewiesen, wie die Anfänge zu jener Verbindung einen mehr persönlichen Charakter trugen, der sich nach der verschiedenen Denkart und Studienrichtung der Verfasser modelte. Es erscheint auch der Vortheil der Einführung geometrischer Begriffe in die Funktionentheorie mehr als ein praktischer, denn als ein grundsätzlicher, wie denn überhaupt in jenem Werke beide Betrachtungsweisen noch vielfach unvermittelt nebeneinander bestehen.

Die direkte Aufeinanderbeziehung derselben scheint von F. Klein zuerst in Aussicht genommen und in einzelnen Fällen durchgeführt worden zu sein[81]). Lässt man nämlich jeder imaginären Tangente einer (algebraischen) Kurve den reellen Punkt entsprechen, welchen sie auf der Zahlenebene nothwendig besitzen muss, und ebenso jeder Berührungslinie ihren ebenfalls reellen Berührungspunkt, so lässt sich eine Fläche konstruiren, welche jeden Theil der Ebene im Allgemeinen mehr-

79) *Clebsch* u. *Gordan*, Theorie der Abel'schen Funktionen, Leipzig 1866. 80) *R. F. A. Clebsch.* Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde, Math. Annalen, 7. Band. S. 26. 81) *F. Klein*, Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Ibid. S. 558 ff.

fach überdeckt. Die Anzahl der Blätter ist gleich der Anzahl der imaginären Tangenten, welche durch einen Punkt im Innern der Kurve (diese geschlossen*) vorausgesetzt) hindurchgehen, bei der Ellipse also = 2. „Die so entstandene Fläche kann dann als vollständiges Bild der betreffenden algebraischen Funktion dienen; sie hat gegenüber der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche den Vorzug, in unmittelbarster Weise auf die betreffende algebraische Kurve bezogen zu sein"[82].

Eine vorläufige Ausdehnung dieser Theorie auf gewisse einfache Fälle von mehrfachen Kurven- bezüglich Verzweigungspunkten ist von Klein[83] später gegeben; in erweiterter Gestalt begegnen wir dieser Auffassung in der bereits zitirten Dissertation von Braun (s. §. 14.). Hier wird bereits von der Riemann'schen Fläche der Lissajous-Kurven gesprochen und, wie erwähnt, die Verzweigung derselben um den unendlich entfernten Punkt mit Hülfe der Cramer-Puiseux'schen Regel bestimmt — eine Ausdrucksweise, die sich nur durch direkten Anschluss an die erwähnte enge Relation zwischen Geometrie und Funktionenlehre erklärt und rechtfertigt.

Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, länger bei diesen an sich hochinteressanten Bestrebungen der Neuzeit zu verweilen. Wir blieben nur deshalb einen Augenblick bei denselben stehen, weil wir einen Blick in die Zukunft eröffnen wollten, welche dem Newton'schen Parallelogramm möglicherweise noch bevorstehen kann, dann aber auch um unseren bei einer früheren Gelegenheit gethanen Ausspruch klarzustellen[84], wonach Puiseux die Cramer'sche Regel „wieder reproduzirt und auf höchst glückliche Weise mit der Theorie der mehrblättrigen Riemann'schen Flächen in Verbindung gesetzt" haben sollte.

§. 16. Fragen wir nun, mit welchen literarischen Hülfsmitteln die vorliegende Zusammenstellung unternommen wurde,

*) Nach projektivischer Auffassung, die hier massgebend ist, kann bekanntlich jede willkürliche Kurve als völlig geschlossen betrachtet werden, indem hier zwischen eigentlichen und uneigentlichen (unendlich entfernten) Punkten kein Gegensatz besteht.

82) *Id.* Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Sitzungsberichte der phys.-med. Sozietät zu Erlangen, 6. Heft. S. 103. 83) *Id.* Weitere Mittheilung über eine neue Art von Riemann'schen Flächen, Ibid. S. 133 ff. 84) *Günther*, Determinanten. S. 4.

so können dieselben nur als völlig unzureichend bezeichnet werden, und nicht allein zur Rektifizirung und Verifizirung etwa schwankender Punkte musste auf die Quellen zurückgegriffen werden, sondern es liess sich auch das Thatsächliche einzig und allein aus diesen hernehmen. Der einzige Mathematiker, welcher sich mit der gesammten Entwickelungsgeschichte des Parallelogramms, wenigstens in ihren Grundzügen, vertraut zeigt, ist Morgan, den wir schon oben (§. 14.) anzuführen hatten. Wir entnehmen seiner Note die Nachricht, dass von älteren englischen Mathematikern zuletzt John Stewart in seinem Kommentar zu Newton[85]) vom Parallelogramm gehandelt habe, in neuester Zeit dagegen Gregory, von dem jedoch wohl nichts Hierhergehöriges zum Druck gelangt ist.

Eine zwar sehr kurze gleichwohl aber recht dankenswerthe Andeutung hat auch in Salmon's Kurvenlehre Eingang gefunden. Der Verfasser[86]) lehrt zwar nicht den eigentlichen Gebrauch des Parallelogramms, sondern begnügt sich zu erwähnen, dass man aus einer Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

die in ein und dieselbe Gruppe gehörenden Glieder leicht durch Probiren erhalten könne, giebt aber genau die Quelle an, wo Näheres zu erfahren sei.

Das analytische Verfahren, welchem eben Newton sein mechanisches zur Seite gestellt hat, wird auch, jedoch ohne Nennung des letzteren, von Serret[87]) in einem eigenen Kapitel behandelt, betitelt: „Besondere Fälle der Entwickelung einer impliziten algebraischen Funktion in eine nach abnehmenden Potenzen der Veränderlichen fortschreitende Reihe". Von diesem Verfahren[88]) hat Minding Gebrauch gemacht bei Herleitung seines bekannten Satzes, der, vor weiterer Ausbildung des Determinantenkalküls, gewissermassen den Schlussstein der Lehre von der Elimination bildete.

---

85) *J. Stewart, J. Newton's Two treatises of the quadratures of curves and Analysis by equations, translated into English with large commentary*, London 1745. 86) *Salmon*, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, deutsch v. Fiedler, Leipzig 1873. S. 54 ff. S. 454. 87) *Serret*, Handbuch der höheren Algebra, deutsch v. Wertheim, 1. Band, Leipzig 1868. S. 500 ff. 88) *Minding*, Entwickelung eines symmetrischen Ausdrucks für den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 31. Band. S. 1 ff.

Noten.

1. Zu §. 4. In der Aufzählung der Mathematiker, welche in der zwischen Newton und Kästner liegenden Periode sich mit unserem Thema beschäftigten, fehlt ein Name und zwar der Name eines Mannes, den zu ignoriren ein Akt grösster historischer Ungerechtigkeit sein würde. Dies ist Brook Taylor, der in seinem bahnbrechenden Werke, welches u. a. auch die noch jetzt nach ihm benannte Reihenentwickelung enthält, auch dem Parallelogramm seine Aufmerksamkeit zuwendet. Allein der Standpunkt des tiefsinnigen Gelehrten ist hier, wie in anderen Fragen, ein sehr eigenartiger, und vor Allem weicht er darin weit von seinen Zeitgenossen ab, dass er nicht gewöhnliche, sondern ausschliesslich Differentialgleichungen jenem Verfahren zu unterwerfen sucht, so dass sein Streben in gewisser Beziehung mit dem Lagrange's (s. o. §. 15.) Berührungspunkte aufweist. Wir glaubten deshalb gut daran zu thun, wenn wir den originellen Denker ganz allein für sich behandelten, und wollen deshalb seinen Verdiensten in dieser Note gerecht zu werden versuchen. Zum Verständniss des Folgenden sei noch bemerkt, dass wir im Anschluss an die von Newton eingeführte und von Taylor adoptirte Terminologie den $n$ten Differentialquotienten von y genommen nach x durch ein y mit n darüber gesetzten Punkten darstellen; es ist also etwa

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{y} = \frac{d^4 y}{dx^4} \cdot dx^4.$$

Es soll nun eine Differentialgleichung der Form

$$F\left(x^\alpha, z^\beta, \frac{dx}{dz} \cdots \frac{d^n x}{dz^n}\right) = 0$$

vorliegen[89]), und man stellt die Forderung: x in eine nach Potenzen von z geordnete auf- oder absteigende unendliche Reihe zu verwandeln. Es wird zunächst der Beweis erbracht, dass allgemein

$$x = Az^\vartheta + Bz^{\vartheta+\eta} + Cz^{\vartheta+2\eta} + \ldots$$

sein müsse, so dass also zunächst 2 Grössen ϑ und η durch eine vorläufige Untersuchung zu eruiren wären. Bis hierher unterscheidet sich Taylor's Gedankengang von dem Kästner's und Anderer nur durch die in der Hypothese liegende grössere Allgemeinheit; im Bestimmungsmodus selbst aber differirt er beträchtlich, nicht sowohl prinzipiell, als vielmehr durch die konzise von allem überflüssigen Beiwerk befreite Darstellung, die sogar (s. §. 14.) in einem eleganten Beweise gipfelt, der unverkennbar demjenigen Puiseux's ähnelt.

Irgend ein Glied der ursprünglichen Differentialgleichung möge sein

$$z^\mu \, x^\alpha \, \dot{x}^\beta \, \ddot{x}^\gamma \, \dddot{x}^\delta \ldots;$$

abgesehen vom Koëffizienten wird dann das erste Glied der aus diesem

89) *Brook Taylor, Methodus incrementorum directa et inversa,* Londini 1757. S. 28.

Gliede hervorgehenden Reihe die Form

$$z^{\pi} \equiv z^{(\mu+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)\vartheta-\beta-2\gamma-3\delta-\ldots}$$

haben, und die Reihe selbst wird somit das allgemeine Glied

$$z^{\pi+m\eta}$$

ergeben. Wir setzen

$$\pi = y\vartheta + v,$$

für ein anderes Glied wird dann etwa jenes $\pi = \dot{y}\vartheta + \dot{v}$ sein u. s. f. *„Tum si illi numeri tales sint, ut facti inter se aequales, et inde determinato ϑ, sint omnium numerorum $(y\vartheta + v)$ per istum valorem ϑ provenientium vel maximi vel minimi, recte determinabitur. Hoc autem fit sequenti artificio“* — dieser Kunstgriff ist eben das Parallelogramm.

Man messe nach einer willkürlichen Längeneinheit jedes einzelne π und trage, nachdem ein rechtwinkliges Axensystem BAC (Fig. 7.) zu

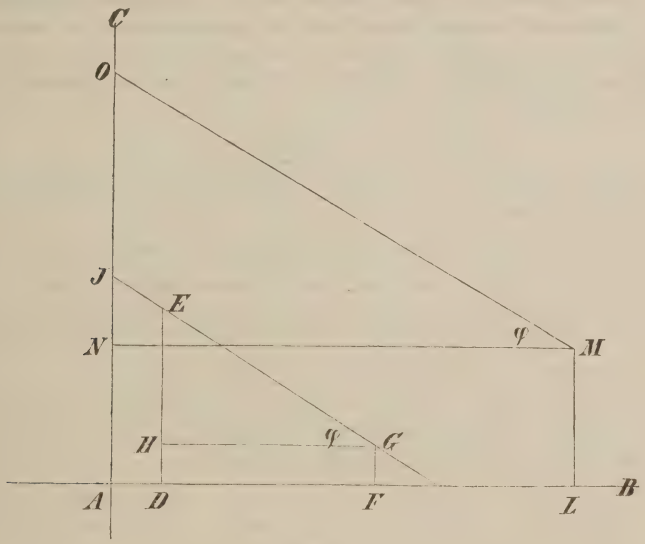


Fig. 7.

Grunde gelegt ist, die y als Abszissen, die v als Ordinaten ab. E, G, M seien drei solche Punkte, und zwar sei deren Lage so beschaffen, dass die Verbindungslinie von M und A zwischen beiden Punkten von der Geraden EG geschnitten wird. Die Koordinatenwerthe sind:

$$E\begin{cases} y = AD \\ v = DE \end{cases} \quad G\begin{cases} y = AF \\ v = FG = DH \end{cases} \quad M\begin{cases} y = AL \\ v = LM = AN; \end{cases}$$

die verlängerte GE schneide die Ordinatenaxe in J, und eine durch M jener Linie parallel gezogene Gerade dieselbe Axe in O. Nach Bedingung ist nun

$$AD\cdot\vartheta + DE = AF\cdot\vartheta + FG,$$

woraus

$$\vartheta = \frac{DE - FG}{AF - AD}$$

fliesst. Statt dieses Bruches kann man, wie ähnliche Dreiecke lehren, auch andere setzen, so folgt

$$\vartheta = \frac{HE}{HG} = \frac{NO}{NM} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Suchen wir jetzt das π des Punktes M, so ist dasselbe gleich

$$AL\cdot\vartheta + LM = AL\operatorname{tg}\varphi + LM = AO,$$

d. h. grösser als die π jener beiden Punkte. Der Punkt M war aber willkürlich jenseits der Geraden EG angenommen, und es erhellt unmittelbar die Regel[90]: „*Ergo numeris omnibus π in plano hoc modo dispositis, si applicetur regula ad puncta duo exteriora E et G, dabitur index ϑ, atque signum indicis η. Deinde invenietur ipse η sumendo maximum divisorem communem omnium numerorum π provenientium per valorem ϑ iam inventum. Unde dabitur forma seriei quaesitae*“.

Führen wir in Taylor's Geist ein Beispiel durch. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$1 + zx - z^{\frac{3}{2}}\dot{x}\dot{x} - \ddot{x} = 0.$$

Nun bildet man für die einzelnen Glieder die oben eingeführten Exponenten, und findet so

für $1 = x^0 = z^0 : \mu = \alpha = \beta = \gamma = \ldots = 0$, also $\pi : y\vartheta + v = 0$;

für $zx : \mu = \alpha = 1,\ \beta = \gamma = \delta = \ldots = 0$, also $\pi : y\vartheta + v = \vartheta + 1$;

für $z^{\frac{3}{2}}\dot{x}\dot{x} : \mu = \frac{3}{2},\ \alpha = \beta = 1,\ \gamma = \delta = \ldots = 0$, also $\pi : y\vartheta + v = 2\vartheta + \frac{1}{2}$;

für $\ddot{x} : \mu = \alpha = \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \delta = \ldots = 0$, also $\pi : y\vartheta + v = \vartheta - 2$.

Nimmt man sonach wiederum ein rechtwinkliges System BAC (Fig. 8.) und überträgt in angegebener Weise die Punkte π, so erhält man die 4 Punkte A, E, G, H mit den Koordinatenwerthen

$$A\begin{cases} y = 0 \\ \vartheta = 0 \end{cases} \quad E\begin{cases} x = \vartheta \\ v = 1 \end{cases} \quad G\begin{cases} x = 2\vartheta \\ v = \frac{1}{2} \end{cases} \quad H\begin{cases} x = \vartheta \\ v = -2. \end{cases}$$

Die in der Regel geforderten Geraden werden demnach durch die 4 Seiten des Vielecks $AEGH$ repräsentirt, und man findet 4 Reihenentwickelungen, nämlich die folgende:

$$x = Az^2 + Bz^{\frac{7}{2}} + Cz^5 + \ldots;$$

$$x = Az^{-\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{\frac{1}{2}} + \ldots;$$

$$x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{-\frac{3}{2}} + \ldots;$$

$$x = Az^{-1} + Bz^{-\frac{5}{2}} + Cz^{-4} + \ldots;$$

90) *Ibid.* S. 31.

deren Koëffizienten hinterher noch ausgerechnet werden müssen. Zwei dieser Reihen schreiten in aufsteigender, zwei in absteigender Ordnung fort, indem, wie Cramer (s. o. §. 11.) sich ausgedrückt haben würde, zwei obere und zwei untere Begrenzungslinien vorhanden sind.

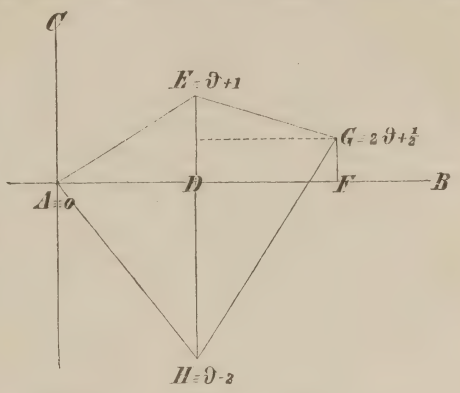


Fig. 8.

II. Zu §. 5. Es fand sich in der nun vollendeten Studie mehrfach Veranlassung, der Arbeiten des deutschen Mathematikers Kästner zu gedenken, der in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von vielen Seiten geradezu als Repräsentant unserer Wissenschaft angesehen wurde. Man kann wohl behaupten, dass jenem Manne viel Weihrauch gestreut wurde, den er nicht verdiente, allein ebenso unberechtigt ist die Verachtung, mit welcher ihm von neueren Gelehrten häufig begegnet wird. Dem Analytiker, der sich nicht speziell mit historischen Studien beschäftigt hat, ist in Anbetracht der vielen gerade analytischen Sünden, deren sich die Kästner'sche Schule allerdings schuldig gemacht hat, ein so herbes Urtheil nicht zu verübeln; wenn aber auch ein Historiker von der Bedeutung, wie Hermann Hankel es unzweifehaft war, sich in gleichem Sinne vernehmen lässt, so ist dem im Interesse der geschichtlichen Wahrheit entschieden entgegenzutreten. Hankel lässt sich nicht leicht eine Gelegenheit entgehen, ohne gegen Kästner in der schärfsten Weise auszufallen, wofür wir leicht einige prägnante Proben anführen können. So heisst es da, wo von Kant's Urtheil über die arithmetischen Elementarthatsachen die Rede ist, unter Anderem: „Freilich war Kant's Ansicht nicht allein der Ausdruck der von ihm wohlgekannten Mathematik seiner Zeit, wo Kästner als grosser Mann galt"[91]). An einer anderen Stelle ist gar von ihm[92]) als einem Manne die Rede, welcher den Literarhistorikern als Epigrammendichter wohl bekannt ist, von dem der Geschichtschreiber der Mathematik aber kaum etwas anderes zu sagen weiss, als dass er Nichts geleistet hat. Verhält sich dies wirklich so, oder ist Hankel hier zu weit gegangen? Wir treten für die letztere Auffassung ein und halten dafür, dass Hankel's unparteiisch-historisches Urtheil, das sich in der älteren Zeit und im früheren Mittelalter so schön bethätigt, bei Beurtheilung neuerer Arbeiten nicht immer Stich hält*). Wir wollen damit dem hochverdienten Verfasser

*) Wir werden unsere hier ausgesprochene Ansicht in dem Referate ausführlicher begründen, welches wir von Hankel's neuestem historischen

91) *Hankel*, Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen, 1. Theil, Leipzig 1867. S. 53. 92) *Id.* Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Tübingen 1869. S. 26.

selbstverständlich nicht zu nahe treten, sondern finden es erklärlich, dass dem in Riemann's Schule aufgewachsenen Mathematiker, der an seinem Theile selbst bahnbrechende Werke schuf, der Standpunkt einigermassen abhanden gekommen war, von dem aus die Geistesprodukte einer vergangenen Periode unbefangen betrachtet werden können*). Aber wir können es uns nicht versagen, einen kleinen Eingriff in das jetzt so vielbeliebte Kapitel der „Ehrenrettungen" zu machen und Kästner in seinem wahren Lichte, freilich nicht als Genie, aber doch als einen Mann erscheinen zu lassen, der „etwas geleistet hat".

So wenig der Literarhistoriker den Gleim-Ramler'schen Kreis mit dem Massstabe messen darf, welchen er an die Leistungen eines Lessing oder Wieland anzulegen gewohnt ist, ebensowenig dürfen einem Manne, wie Kästner, Vorhalte darüber gemacht werden, dass er Dinge nicht wusste, von denen eben die Welt überhaupt erst durch Lagrange und Cauchy etwas erfahren hat. Und drücken wir nicht die enormen Verdienste dieser Geistesheroen selbst herunter, wenn wir ihre Vorläufer nur als erbärmliche Stümper bezeichnen? Gehen wir jedoch zur Sache selbst über.

Hätte Kästner nichts gethan, als die Lehre vom Parallelogramm der Engländer in eine systematische überdiess mit Beweisen und Beispielen ausgestattete Darstellung geformt, so wäre diess allein schon ein Verdienst. Denn gerade durch diese Methode sollte ja dem Missbrauche entgegengetreten werden, welchen die damalige Zeit mit den sogenannten unbestimmten Koëffizienten trieb, und an dessen Konservirung wir, wenn wir ehrlich sein wollen, doch auch den Bernoulli's und Leonhard Euler ein gutes Theil zurechnen müssen. Allein Kästner hat auch noch andere reelle Leistungen aufzuweisen, deren Kenntnisse allerdings einige von gewissen Heisssporen perhorreszirte Beschäftigung mit seinen Werken verlangt. Kästner hat in Deutschland den ersten eigentlichen Beweis für

---

Werke für das „Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik" vorbereiten. Dass trotz des imposanten Gesammteindrucks, welchen jenes Buch gewiss auf jeden Leser macht, im Einzelnen sich Ausstellungen machen lassen, hat auch Curtze[93]) kürzlich hervorgehoben.

*) Eine recht charakteristische Stelle hierfür ist die, wo Hankel[94]) die von Kästner gemachte Bemerkung bespricht, dass für jede Strecke mit den Endpunkten A und B

$$AB + BA = 0$$

sei. Gewiss war Kästner noch nicht der Mann, der aus einer solchen Relation weittragende Schlüsse zu ziehen vermochte, aber mehr Anerkennung für eine solche ganz dem Zeitgeist widersprechende Wahrnehmung scheint er uns doch zu verdienen, als ihm Hankel zu Theil werden lässt.

---

93) *Curtze,* Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's: Zur Geschichte der deutschen Mathematik im 15. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. S. 59. 94) *Hankel*, Ueber die Vieldeutigkeit der Quadratur und Rektifikation algebraischer Kurven, Leipzig 1864. S. 8.

den sogenannten Harriot'schen Lehrsatz gegeben[95]), den man bis dahin[96]) fast für unbeweisbar gehalten hatte, er hat die von Vieta und Kepler geschaffene, von Cotes und de Moivre so wesentlich geförderte Lehre von der Winkeltheilung zuerst in ein analytisches Gewand gekleidet und vervollkommnet[97]), er hat die Theorie der sogenannten Archimedischen Körper auf ein sicheres Fundament[98]) gestellt, und ihm verdanken wir die Einführung der bis dahin ganz unbeachtet gebliebenen Euler'schen (analytischen) Trigonometrie in Deutschland[99]). Als wissenschaftliche Mittelsperson wie als Lehrer hat Kästner Bedeutendes gewirkt, seine zahlreichen Schüler, unter denen wir nur Karsten, Klügel und Olbers nennen, haben zum grossen Theile Tüchtiges von sich hören lassen, und wir sind überzeugt, hätte Kästner sich nicht am Abende seines Lebens noch zur Abfassung seiner unglücklichen „Geschichte der Mathematik" verleiten lassen*), so würde sein Name jetzt ganz anders dastehen, als es freilich der thatsächliche Fall ist.

---

*) So wenig natürlich Kästner's Buch seinen Titel rechtfertigt, so behält es doch als Repertorium von Notizen stets einige Brauchbarkeit bei und bietet sogar, wenn man nur über die unvermeidliche *garulitas senilis* hinwegzukommen im Stande ist, viele interessante Einzelheiten, deren manche, wie vorliegendes Werk zeigen kann, eben nur bei ihm zu finden sind.

---

95) *Kästner*, *Dissertatio de theoria radicum in aequationibus*, Lipsiae 1736. 96) *Wolf*, Der Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften letzter Theil, Halle 1717. S. 175. 97) *Kästner*, *Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus*, Gottingae 1756. 98) *Id. De corporibus polyedris data lege irregularibus*, Comment. Gotting. VI, VIII, IX. 99) *Id.* Astronomische Abhandlungen, 1. Band, Göttingen 1772. S. 65 ff.

Kapitel IV.

Historische Studien über die magischen Quadrate.

§. 1. Die Entstehung der magischen Quadrate ist in tiefes Dunkel gehüllt. In den meisten Darstellungen wird Indien als ihr Vaterland genannt, ohne dass doch dieser Ansicht eine genügende historische Unterstützung zur Seite stünde. Es mochte einerseits diess seinen Grund in der bekannten Thatsache haben, dass das Schachspiel eine indische Erfindung ist[1]), andererseits aber bezog man sich auf die Angaben des bekannten Reisenden La Loubère. Derselbe sagt nämlich in seinem Berichte[2]): *„Mr. Vincent, dont j'ay souvent parlé dans ma Relation, me voyant un jour, dans le Vaisseau pendant notre retour, ranger par amusement des quarrés magiques à la manière de Bachet, me dit que les Indiens de Surate les rangeoient avec bien plus de facilité, et m'enseigna leur méthode pour les quarrés impairs seulement, ayant, disoit-il, oublié celle des pairs"*. Man erkennt leicht aus diesen Worten, wie wenig sie dem Zwecke, zu welchem man sich ihrer mehrmals bedienen wollte, eigentlich dienen können; es geht — Herrn Vincent's Glaubwürdigkeit vorausgesetzt — doch nur das aus ihnen hervor, dass zu Ende des siebzehnten Jahrhunderts indische Braminen eine Regel zur Verfertigung magischer Quadrate besassen. Wäre auch diese, wie das bei vielen anderen mathematischen Kenntnissen dieser Leute allerdings der Fall ist, eine ehrwürdige Reliquie aus dem Blüthezeitalter der indischen Wissenschaft, so wäre gar nicht abzusehen, warum in den uns doch zum grossen Theil erhalten gebliebenen Werken jener Epoche gar keine Spur davon sich finden sollte. Für den indischen Ursprung der magischen

---

1) *Lassen*, Indische Alterthumskunde, 4. Theil, Bonn 1862. S. 905.

2) *La Loubère, Du Royaume de Siam*, Tom. II, A Amsterdam 1691. S. 237.

Quadrate beweist somit La Loubère's Nachricht gar nichts; indess wollen wir doch den Anfang unserer historischen Betrachtung mit dieser dem Sprachgebrauch zufolge nun einmal als indisch bekannten Methode machen.

§. 2. Die indische Vorschrift würde sich folgendermassen aussprechen lassen:

Nachdem das gegebene Quadrat in seine $(2n+1)^2$ Zellen eingetheilt ist, setze man die Zahl 1 in die mittlere Zelle der obersten Zeile) und die Zahl 2 in diejenige, welche bei der Bezeichnung durch doppelte Indices mit*

$$\alpha_{2n+1,\ n+2}$$

charakterisirt werden müsste. Alsdann schreibe man die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in diagonaler Richtung in die Zellen ein, so zwar, dass nach erfolgter Durchlaufung einer Nebendiagonale von p Zellen die (auf der anderen Seite der Hauptdiagonale belegene) Nebendiagonale von $(2n+1-p)$ Zellen an die Reihe kommt. Stösst man hiebei auf eine schon besetzte Zelle, so gehe man senkrecht Eine Zelle herab und fahre in gleicher Weise fort.

Nach dieser Regel wurde das nebenstehende Zauberquadrat von $(2 \cdot 3 + 1)^2 = 49$ Zellen gebildet; die Zahl 2 hat hier die Indices 7 und 5.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20.

Beweise für die Richtigkeit dieses Verfahrens haben La Loubère selbst[3]), dann aber auch De la Hire[4]) und Mollweide[5]) geliefert, indess lassen diese Beweise sämmtlich an

*) Die Worte „Zeile" und „Colonne" werden ganz in dem bekannten Sinne der Determinantentheorie angewandt.

3) *La Loubère*, S. 266 ff. 3) *De la Hire, Nouvelles constructions et considérations sur les quarrés magiques avec les demonstrations*, Mém. de Math. et de Phys. de l'acad. royale des sciences, Année MDCCV. S. 167.

5) *Mollweide, De quadratis magicis commentatio*, Lipsiae MDCCCXVI. S. 45 ff. *Id.*, Mathematisches Wörterbuch, Erste Abtheil., Vierter Theil, Leipzig 1823. S. 18 ff.

Einfachheit zu wünschen übrig, und wir wollen deshalb eine immerhin einfachere Betrachtung hier mittheilen, welche zeigt, dass in der That, wie es eben der Charakter eines magischen Quadrates fordert, die Summe aller Zeilen, Colonnen und der beiden Haupt-Diagonalen die nämliche Zahl

$$\frac{1+2+\cdots+(2n+1)^2}{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)}(2n+1)^2\left[(2n+1)^2+1\right]$$
$$= (2n+1)(2n^2+2n+1)$$

ergiebt, im obigen speziellen Falle also $7(18+6+1) = 175$.

Betrachten wir die $(n+1)$te Colonne (von links nach rechts gerechnet), so liefert diese die Summe

$$1 + 1(2n+2) + 1 + 2(2n+2) + 1 + \cdots$$
$$+ 2n(2n+2) + 1 = (2n+1)(2n^2+2n+1).$$

Fassen wir nunmehr eine andere Colonne in's Auge, etwa diejenige, in welcher die Zahl p (> 1, $\leqq 2n+1$) vorkommt. Man bemerkt, dass sämmtliche Terme in zwei arithmetische Progressionen mit der gemeinschaftlichen Differenz $(2n+2)$ sich zertheilen. Drückt man diess analytisch aus, so nimmt die Summe Σ folgende Form an:

$$p + p + 1(2n+2) + p + 2(2n+2) + \cdots + p$$
$$+ (2n+1-p)(2n+2) + p + (2n+1-p)(2n+2) + 1$$
$$+ p + (2n+1-p)(2n+2) + 1 + 1(2n+2) + \cdots + p$$
$$+ (2n+1-p)(2n+2) + 1 + (p-2)(2n+2);$$

hieraus erhält man mit Hülfe der bekannten Summationsformeln

$$\Sigma = (2n+2-p)(2n^2+3n-np+1) + (p-1)(4n^2+4n-np$$
$$+ 1) = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (2n+1)(2n^2+2n+1).$$

Ein wenig schwieriger gestaltet sich die Sache bei den Horizontalreihen, indem wir hier drei arithmetische Progressionen zu berücksichtigen haben, ausgenommen bei denjenigen Zeilen, denen die Terme 1 und 2 angehören, denn bei diesen treten blos zwei verschiedene Reihen auf. Wir greifen diejenige Zeile heraus, in welcher die Zahl $(2n+1-2p)$, also eine ungerade Zahl vorkommt ($p \leqq 0$, $< n$), indem andernfalls die Rechnung sich nicht wesentlich ändert. Dann lehrt uns der Augenschein, dass wir folgende drei Progressionen zu summiren haben:

I. $2n+1-2p,$
$2n+1-2p+1\,(2n+3),$
$\vdots$
$2n+1-2p+p\,(2n+3);$

II. $2n+1-2p+p\,(2n+3)+2,$
$2n+1-2p+p\,(2n+3)+2+1\,(2n+3),$
$\vdots$
$2n+1-2p+p\,(2n+3)+2+(n-1)\,(2n+3);$

III. $2n+1-2p+p\,(2n+3)+2+(n-1)(2n+3)+2,$
$2n+1-2p+p(2n+3)+2+(n-1)(2n+3)+2+1(2n+3),$
$\vdots$
$2n+1-2p+p\,(2n+3)+2+(n-1)\,(2n+3)+2$
$+(n-p-1)\,(2n+3).$

Führen wir die hier angedeuteten Summationen wirklich aus, so erhalten wir wiederum die Summe

$$\Sigma=(2n+1)\,(2n^2+2n+1).$$

Auf das Fortschreitungsgesetz der Zahlen in den Diagonalreihen brauchen wir nicht weiter einzugehen, da dasselbe sehr einfach ist, und es ist somit der — keineswegs ganz leichte — Beweis für die Richtigkeit der indischen Methode als erbracht anzusehen.

La Loubère schreibt den Indern auch ein Verfahren zur Konstruktion magischer Quadrate von gerader Zellenzahl zu, ohne dasselbe jedoch namhaft machen zu können[6]). Er glaubt dasselbe errathen zu haben, und wir werden später darauf zurückkommen müssen.

§. 3. Mit völliger Bestimmtheit lassen sich die magischen Quadrate zuerst bei den Arabern nachweisen. Freilich haben auch bei diesem Volk die eigentlichen Mathematiker sich nicht mit ihnen beschäftigt, und so darf es uns nicht wundern, dass die Historiker keine Notiz von ihnen nahmen; nur Hankel[7]) thut ihrer wenigstens Erwähnung. Die Anfertigung und Deutung solcher Figuren war nicht das Geschäft des wirklichen Mathematikers, sondern vielmehr das des Astrologen. Ibn Khaldoun giebt uns eine ausführliche Kunde von der „Talis-

6) *La Loubère,* S. 273. 7) *Hankel,* Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 268.

manologie" seiner Landsleute und beschreibt dabei auch verschiedene Amulette. Hiezu bemerkt der Uebersetzer[8]): „*Le mot* وفق „*ouifk*", *que je rends ici par amulette, désigne plus particulièrement ces tableaux numériques qui s'appellent carrés magiques. Chacune des sept planètes avait son ouifk particulier. Le Chems el-Maaref d'El-Bouni fournit un grand nombre d'indications sur cette matière et sur les procédés de la magie*". Weitere Aufschlüsse hierüber dürften sonach von den Fortschritten der arabischen Philologie zu erwarten sein; indessen besitzen wir auch sonst einige Angaben aus anderer Quelle, die freilich dem Mathematiker nicht Genüge leisten können.

Die philosophische Sekte, welche im 10. Jahrhundert durch das ganze Kalifenreich sich verzweigte und von Dieterici[9]) in ihren eigenartigen Bestrebungen auf's Treffendste gekennzeichnet wurde — die Vereinigung der „lauteren Brüder" — hat uns in den Schriften, welche sie ausdrücklich[10]) für den propädeutisch-philosophischen Unterricht ihrer Mitglieder bestimmt hatte, auch einige Bemerkungen über magische Quadrate überliefert. Wir wollen die betreffende Stelle nach Dieterici's Uebersetzung hier mittheilen[11]):

„In der vorigen Abhandlung haben wir etwas von den Eigenthümlichkeiten der Zahlen und in dieser etwas von den Eigenthümlichkeiten der Figuren angegeben; jetzt wollen wir etwas von den Eigenthümlichkeiten beider zusammen hervorheben. Verbindet man einige Zahlen und einige mathematische Figuren mit einander, so gehen daraus andere Eigenthümlichkeiten hervor, die eine jede einzelne derselben allein nicht hat.

2	7	6	1. Schreibt man neun Zahlen in dieser neun-
9	5	1	fach geformten Gestalt, so kommt, wie man auch
4	3	8	immer zähle, die Summe 15 heraus.

4	14	15	1	2. Schreibt man 16 in dieser Figur mit
9	7	6	12	16 Fächern, so kommt, wie man auch immer
5	11	10	8	zähle, 34 heraus.
16	2	3	13	

8) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale et autres bibliothèques*, Tome XXI., Paris MDCCCLXVIII. S. 180. 9) *Dieterici*, Die Naturanschauung und Naturphilosophie der Araber im zehnten Jahrhundert, Posen 1864. 10) *Id.* Die Propädeutik der Araber im zehnten Jahrhundert, Berlin 1865. S. III. 11) *Ibid.* S. 42 ff.

21	3	4	12	25	3. Dasselbe gilt von 25; schreibt man
15	17	6	19	8	sie in einer Form mit 25 Fächern, so
10	24	13	2	16	kann man zählen, wie man will, die
18	7	20	9	11	Summe ist 65.
1	14	22	23	5	

11	22	33	5	23	18	4. Schreibt man 36 in dieser Form,
25	16	7	30	13	20	so ist die Summe, wie man auch
27	6	35	36	4	3	immer zähle, 111.

10	31	1	2	33	24	5. Schreibt man 49 in dieser Form
14	19	8	29	26	15	mit 49 Fächern, so ist die Summe,
24	17	28	9	12	21	wie man immer zähle, 75.

Dasselbe gilt von 64, in einer Figur mit 64 Fächern, wie man auch immer zähle, die Summe ergiebt stets 260.

Ebenso verhält es sich mit 81; so in einer Figur mit 81 Fächern niedergelegt, wie man auch immer zähle, die Summe ist stets 369.“

Es folgt dann noch im Original eine Besprechung von Schachzügen, auf welche wir in einer Note zurückkommen werden, sowie eine kurze Gebrauchsanweisung zu magisch-astrologischen Zwecken.

Wie diese Quadrate hergestellt wurden, darüber befinden wir uns leider völlig im Dunkeln. Sehr wahrscheinlich aber ist es, dass bei dem regen Handels- und wissenschaftlichen Verkehr Arabiens nach Ost und West die Kunde der Erfindung einerseits zu den Indern drang und dort vielleicht zu eigener Beschäftigung mit dem Gegenstande veranlasste, andererseits dagegen auch auf die christlichen Länder überging. Ein flagrantes Beispiel der durch diese Uebertragung auf den Okzident ausgeübten Anregung werden wir sofort näher kennen lernen; aber auch noch viel später scheint man direkt aus der arabischen Quelle geschöpft zu haben. Wenigstens scheint diess aus einer gewissen Thatsache hervorzugehen, die uns weiterhin (s. §. 9.) mancherlei zu denken geben wird.

§. 4. Die arabische Erfindung, mathematisch interessant, aber durch ihren mystischen Beigeschmack auch sonst der Zeitrichtung entsprechend, fand bei dem nächsten Nachbarvolke, den Oströmern, zuerst Aufnahme und Fortbildung. Ja wir stehen nicht an, diejenige Leistung, welche auf diesem Gebiete entstand und deren Studium wir uns jetzt wollen an-

gelegen sein lassen, für die bedeutendste zu erklären, welche überhaupt von einem Byzantiner ausging, und dass in rein wissenschaftlicher Beziehung der Name des betreffenden Autors die aller anderen spätrömischen Mathematiker — Psellus, Maximus Planudes, Pediasimus — bei weitem überragt. Lernen wir zuerst diese Persönlichkeit näher kennen.

Gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts fand De la Hire, seiner eigenen Angabe nach [12]) wohl zufällig, ein kleines Manuskript auf der Pariser Bibliothek, welches den Traktat eines gewissen *Manuel Moschopulus* über magische Quadrate enthielt. Der französische Mathematiker, der sich um jene Zeit selbst ausgedehnten theoretischen Untersuchungen über diese Materie hingab, studirte die Handschrift und gab mehrfach einen kurzen Auszug aus derselben — seine Absicht, dieselbe zugleich mit einer Uebersetzung zu ediren, scheint er jedoch nicht realisirt zu haben*). Wann und von wem eigentlich das Original selbst herrührt, ist leider nicht völlig aufgeklärt.

Die griechische Literaturgeschichte kennt zwei Gelehrte dieses Namens. In Pauli's Lexikon [13]) wird hierüber gesagt: „Es muss zwischen dem älteren Manuel Moschopulos aus Kreta (der unter Andronicus Palaeologus in der letzten Periode des vierzehnten, oder nach Titze unter Michael VIII. Palaeologus, in der zweiten Periode des dreizehnten Jahrhunderts lebte) und dem jüngeren, seinem Neffen (daher Ἀνέψιος genannt), dem Theologen unterschieden werden". Von den mathematischen Leistungen des einen oder anderen ist weder hier noch auch in Grässe's Literaturgeschichte die Rede, und auch Titze hat bei seinen umfangreichen Forschungen über Moschopulos von dieser Seite seiner Thätigkeit absehen zu können geglaubt. Unentschieden wird die Autorschaft auch von der „*Nouvelle Biographie*" gelassen; dieselbe sagt [14]): „*Les ouvrages de Moschopulos sont nombreux, et traitent presque tous des sujets grammaticaux. Un des Moschopulos est l'auteur d'un*

*) In manchen Büchern wird von dieser beabsichtigten Uebersetzung wie von einer wirklich vollendeten Thatsache gesprochen; wir haben dieselbe jedoch nirgends aufzufinden vermocht.

12) *De la Hire*, S. 162. 13) *Pauli*, Real-Encyklopädie der klassischen Alterthumswissenschaft, 4. Band, Stuttgart 1846. S. 1503. 14) *Nouvelle Biographie générale depuis les temps les plus réculés jusqu'à nos jours*, Tome XXXVI, Paris 1861. S. 711.

petit traité sur les Carrés magiques . . . Le mathématicien français de la Hire traduissit ce petit traité en latin et le lut à l'académie des Sciences en 1691". Dies beruht, wie die Randnote besagt, auf einem Irrthum, in jenem Jahrgang ist wohl von einer Uebersetzung die Rede, aber abgedruckt ist sie nicht.

Alles in Allem wird man die Abhandlung des Moschopulos mit ziemlicher Richtigkeit in das vierzehute Jahrhundert verlegen können; für eine späte Abfassungszeit spricht auch die bereits sehr korrumpirte Sprache. Wir theilen nunmehr den Text wörtlich mit, wie wir ihn einer Handschrift der Münchener Hof- und Staatsbibliothek entnehmen. Der Kodex, in welchem dieselbe sich findet, trägt die Bezeichnung *Cod. Gr. Fol. 100* und enthält eine grosse Anzahl griechischer Schriften; als Abschreiber eines grossen Theiles derselben wird im Eingang Johann Murmureus aus Nauplia (fünfzehntes Jahrhundert) genannt. Dieselbe am Kopfe befindliche Einleitung nennt den Kodex *„valde mutilus, probe conservatus et inscriptus"*, und in der That ist das Aussehen des — durchaus auf Papier geschriebenen — Buches ein geradezu elegantes. Der Traktat des Moschopulos, oder, wie er hier heisst, Moschopulos, nimmt 6 Blätter, Fol. 238—243, ein; ausser ihm enthält die Kollektion noch verschiedene andere mathematische Arbeiten*). Die nachstehende Textwiedergabe kann natürlich eigentlich philologischen Ansprüchen nicht genügen, indem dazu vor Allem eine Vergleichung mit den anderen Handschriften erforderlich wäre, indess wird sie als Basis für weitere Studien dienen können. Auf die wichtigsten der zahlreichen Abweichungen vom echt-hellenischen Sprachgebrauche ist hingewiesen worden, dagegen wurden gewisse andere immer wiederkehrende Eigenthümlichkeiten, wie z. B. eine souveräne Verachtung des *Jota subscriptum*, entsprechend beseitigt, beziehungsweise verbessert.

§. 5. Es folgt jetzt der Text selbst, wobei wir nur die darin ziemlich unpraktisch vertheilten Figuren deutlich an ihre Plätze stellten (s. d. beigeschlossenen Tafeln).

Τοῦ ἁγιωτάτου καὶ λογιωτάτου κατὰ μανουὴλ τοῦ μοσχοπόλου παράδοσις εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν [1]),

*) Unter anderem findet sich eine Planudes-Handschrift vor, welche zu der bekannten Gerhardt'schen Ausgabe einige Varianten darbieten dürfte.

ἣν ἐποιήσατο βιασθεὶς παρὰ τοῦ νικολάου σμυρναίου ἀρταβάσδου[2]) ἀριθμητίου καὶ γεωμέτρου τοῦ ῥαβδᾶ*).

Τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν[3]) εἰσὶ περιττοὶ οἱ δὲ ἄρτιοι καὶ τῶν ἀρτίων πάλιν οἱ μὲν ἀρτιάκις ἄρτιοι οἱ μέχρις ὧν ἀριθμῶν μονάδος εἰς ἴσα δύο[4]) διαιρούμενοι οἱ δὲ ἄρτιοι περιττοὶ[5]) οἱ μὲν μέχρι μονάδος εἰς ἴσα δύο διαιρεῖσθαι δυνάμενοι. πᾶς δὲ ἀριθμὸς ἐφ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς[6]) ποιεῖ τετράγωνον ἰσόπλευρον[7]) οἷον ὁ τριὰς ἐφ' ἑαυτὸν[8]) πολλαπλασιασθεὶς ποιεῖ τὸν Θ καὶ ἐστὶν ὁ Θ τετράγωνος ἰσόπλευρος[9]). πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ γ παντὸς γὰρ τετραγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ[10]) ὁ πολλαπλασιάσας[11]) ἑαυτὸν ἀριθμὸς καὶ ἀποτελέσας αὐτό· ἔστι δὲ αὕτη πάντως πανταχόθεν ἴσα καὶ ἐν ταῖς διαμέτροις ἵνα δὲ ἐπὶ τῆς ἀναγραφῆς (Fig. 1.) σαφέστερον γένηται τοῦτο ἀναγεγράφθω τετράγωνον ἰσόπλευρον. καὶ περιγραφέσθωσαν αὐτῷ τόποι ἀριθμοῦ τετραγώνου διὰ γραμμῶν οὕτως· εἶτα τιθέσθω μονὰς ἐφ' ἑαυτῷ ἑκάστῳ τῶν τόπων καὶ ἔστι πάντων δῆλον ὅτι ἡ μὲν σύνθεσις ἁπᾶσα[12]) τούτων τῶν μονάδων πεσεῖται εἰς τὸν Θ· ἡ δὲ σύνθεσις ἑκάστης τῶν πλευρῶν εἰς τὰ[13]) τρία πανταχόθεν ἴση καὶ ἐν ταῖς διαμέτροις καὶ τούτου μὲν ἡ κατάληψις ῥᾳδία. Εἰ δὲ ἀναγραφείη τετράγωνον καὶ περιγραφῶσιν αὐτῷ τόποι ἀριθμοῦ τετραγώνου, εἶτα μὴ τεθῶσιν[14]) ἐν τοῖς τόποις μονάδες[15]), ἀλλὰ ἡ μονὰς καὶ οἱ ἀπὸ μονάδος ἐφεξῆς ἀριθμοὶ οὐκέτι ἴση ἡ πλευρὰ γενήσεται πανταχόθεν τῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν ἐφεξῆς καὶ ἐπὶ τῶν τόπων τιθεμένων, εἰ δὲ ζητηθείη θέσις ἥτις δυνήσεται τὴν πλευρὰν πανταχόθεν ἴσην ποιεῖν καὶ ἐν ταῖς διαμέτροις οὐ πάντοτι[15]) ῥᾳδὺς[16]) εὑρεθήσεται· εἰ δὲ μόλις ἐφ' ἑνὸς τετραγώνου ἑρεθείη οὐκέτι ἔστιν ἐλπὶς[17]) καὶ ἐφ' ἑτέρου εὑρεθήσεσθαι· μεθόδῳ δέ τις ὁδηγούμενος ῥᾳδίαν ἕξει

*) Von diesem Mathematiker berichtet Gerhardt[15]), dass er eine später im Druck erschienene Schrift über das Fingerrechnen verfasst habe. Ausserdem bewahre die kaiserliche Bibliothek zu Paris von ihm ein arithmetisches Manuskript „*Epistola Nicolai Smyrnaei Rhabdae ad Theodorum Tschabuchen Clazomenium*", an dessen Schluss eine Beispielsammlung angehängt sei, betitelt: *μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν*. Der ihm in unserem Texte beigelegte Beiname „*ἀρταβάσδης*" wird auch bei Schöll[16]) erwähnt.

15) *Gerhardt*, Das Rechenbuch des *Maximus Planudes* nach den Handschriften der kaiserlichen Bibliothek zu Paris herausgegeben, Halle 1865. S. XII. 16) *Schöll*, *Histoire abrégée de la littérature grecque*, deutsch von Pinder, 3. Band, Bonn 1831. S. 345.

τὴν τοῦτο δυναμένην θέσιν ἐφ' ᾧ ἂν βούλοιτο[18]) τετραγώνῳ· ἔστι δὲ οὐχ ἁπλῆ τις[19]) ἐπὶ τούτῳ μέθοδος, ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῶν ἀπὸ περιττῶν γενομένων ἑτέρα καὶ ἐπὶ τῶν ἀπὸ ἀρτιάκις ἀρτίων ἑτέρα καὶ ἔτι ἑτέρα ἐπὶ τῶν ἀπὸ ἀρτιοπεριττῶν[19]), περὶ ὧν νῦν ἡμῖν πρόκειται εἰπεῖν· δεῖ δὲ πρότερον περὶ τῆς πλευρᾶς εἰπεῖν τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν μέχρι τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, ἣν εὑρίσκομεν οὕτως· συντιθέαμεν[20]) τοὺς ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὺς μέχρι τοῦ τετραγώνου· εἶτα τὴν ἀπὸ τῆς συνθέσεως ποσότητα μερίζομεν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιάζοντα ἑαυτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀποτελέσαντα αὐτὸ καὶ τὸ ἐπιβάλλον ἑκάστῃ μονάδι αὐτοῦ· τοῦτο νομίζομεν εἶναι πλευρὰν τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν μέχρι τοῦ ζητουμένου τετραγώνου· οἷον ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν πλευρὰν τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν μέχρι τοῦ $\overline{\Theta}$. συντιθέαμεν οὖν τῇ μονάδι τὰ $\overline{\beta}$ καὶ γενήσεται $\overline{\gamma}$· εἶτα τοῖς τρισὶ τὰ τρία καὶ γίνονται $\overline{\varsigma}$· εἶτα τοῖς $\overline{\varsigma}$ τὰ $\overline{\Delta}$ καὶ γίνονται $\overline{\iota}$· εἶτα τοῖς $\overline{\iota}$ τὰ $\overline{\varepsilon}$ καὶ γίνονται $\overline{\iota\varepsilon}$ καὶ μέχρι τοῦ $\overline{\Theta}$ οὕτως· καὶ γίνεται ἡ ποσότης πᾶσα $\overline{\mu\varepsilon}$· ταῦτα μερίζομεν ἐπὶ τὰ τρία· οὕτως γὰρ ἐφ'[22]) ἑαυτὸν οὕτος πολλαπλασιασθεὶς ἐποίησε τὸν $\overline{\Theta}$ καὶ ἐπιβάλλει ἑκάστῃ μονάδι τοῦ $\overline{\gamma}$. $\overline{\iota\varepsilon}$. ταῦτα εἰσὶ πλευραὶ τῶν ἀπὸ μόνου ἀριθμῶν μέχρι τοῦ $\overline{\Theta}$ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. Ἵνα μὴ ἐπιπολὺ προχωροῦντες τοῦ ἀριθμοῦ κάμνομεν συντιθέντες[23]) τοὺς ἀπὸ μόνου ἀριθμοὺς[24]) ζητήσαντες εὕρομεν μέθοδον ἵν' εὑρίσκωμεν ῥαδίως τὴν ποσότητα τῆς συνθέσεως τῶν ἀπὸ μόνου ἀριθμῶν μέχρις οὗ βουλόμεθα, ἥτις ἔχει οὕτως· κατέχομεν τὸν ἀριθμὸν μέχρις οὗ ἡ σύνθεσις προχωρεῖ καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἑαυτὸν καὶ τὴν γινομένην ἀπὸ τοῦ πολλαπλασίου ποσότητα διαιροῦμεν εἰς ἴσα δύο· εἶτα τῷ ἑνὶ μέρει συντιθέαμεν τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτὸν ἀριθμοῦ· καὶ συμβαίνει ἐξ ἀνάγκης τὴν ποσότητα τῆς συνθέσεως τοῦ ἡμίσεος μέρος τῆς ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ποσότητος καὶ τοῦ πολλαπλασιάσαντος ἑαυτὸν ἀριθμοῦ εἶναι τὴν αὐτὴν τῇ ἀπὸ τῆς συνθέσεως τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν μέχρι τοῦ πολλαπλασίασαντος ἑαυτὸν ἀριθμοῦ· γένοιτο δὲ τοῦτο σαφέστερον ἐπὶ τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν οὕτως (Fig. 2.). Ὑποκείσθω πάλιν ὁ $\overline{\Theta}$ μέχρις[25]) οὗ ζητῆται[26]) ἡ ποσότης τῆς συνθέσεως τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν· τοῦτον οὖν πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἑαυτὸν καὶ γίνεται ὁ $\overline{\pi\alpha}$ ὃν διαιροῦμεν εἰς ἴσα δύο καὶ ἐπιβάλλει ἑκατέρῳ τῷ μέρει $\overline{\Delta}$ μονάδες καὶ ἥμισυ[27])· πάλιν διαιροῦμεν τὸν $\overline{\Theta}$ εἰς ἴσα δύο· ταύτας συντιθέαμεν τῷ ἡμίσει μέρει τῆς ἀπὸ τοῦ πολλαπλασίου ποσότητος ἥμισυ[28]) τοῖς $\overline{\mu}$ καὶ ἡμίσει καὶ γίνονται ὁμοῦ $\overline{\mu\varepsilon}$.

ἦν δὲ καὶ ἡ ποσότης τῆς συνθέσεως τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν μέχρι τοῦ $\overline{\Theta}$ $\overline{με}$· ταυτὸ δὲ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἁπάντων· τούτων οὕτως ἐχόντων καιρὸς ἤδη περὶ τῆς θέσεως εἰπεῖν. ἀρχὴ δὲ ἡμῖν ἔστω ὅθεν ὁ ἀριθμὸς δίδωσι· δίδωσι δὲ πρῶτον τὸν ἀπὸ τοῦ τρία οὕτω δυνάμενον τετραγωνισθῆναι [29])· περὶ οὗ ἡμῖν καὶ πρῶτον εἰρήσεται· ἡ δ' εἰρησομένη μέθοδος ἐπὶ τοῦτον ἐπὶ πάντας τοὺς ὁμοειδεῖς διαβήσεται· ἔστι μὲν οὖν δυνατὸν γενέσθαι θέσιν τὸ ἴσον πανταχόθεν δυναμένην ποιεῖν διὰ τῶν δύο καὶ τριῶν· ἔστι δὲ καὶ διὰ τῶν τριῶν καὶ ε̄ καὶ διὰ μὲν τῶν δύο καὶ τριῶν οὕτως· ἀναγεγραμμένων τῶν τόπων τοῦ πρώτως οὕτω δυναμένου τετραγωνισθῆναι ἡμίσου τοῦ $\overline{\Theta}$ οὕτως. Τιθέαμεν [30]) τὴν μονάδα ἐπὶ τοῦ μέσου τόπου τῶν τριῶν τῶν κατωτάτω καὶ μετροῦμεν δύο τόπους ἵνα τοῦτον τὸν ἔχοντα τὴν μονάδα καὶ τὸν ἕτερον ζητοῦμεν κατωτέρου τούτου κατ' [31]) εὐθεῖαν. Τὸν κατωτέρω γὰρ ἀεὶ δεῖ ζητεῖν· ἐπεὶ δὲ οὐχ εὑρίσκομεν ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὰ [32]) ἀνωτάτω πάλιν κατ' εὐθεῖαν ὥσπερ ἀνακυκλοῦντες *) τοὺς τόπους καὶ μετροῦμεν ἐκεῖνον δεύτερον· εἶτα τιθέαμεν τὰ $\overline{β}$ ἐπὶ τῷ μετ' ἐκεῖνον δεξιῷ τόπῳ κατ' εὐθεῖαν ἵνα θῶμεν τὰ $\overline{γ}$. ἀεὶ γὰρ τὸν ἐπὶ τὰ δεξιὰ δεῖ ζητεῖν· ἐπεὶ δὲ οὐχ εὑρίσκομεν ἀνακάμπτομεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ κατ' εὐθεῖαν· πληρουμένων γὰρ ἀεὶ τῶν τόπων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν αὐτῶν ἀναστρέφειν δεῖ· καὶ τιθέαμεν τὰ $\overline{η}$ [33]) ἐπὶ τῷ τελευταίῳ μὲν τόπῳ ἀπὸ τῆς ἀνακάμψεως· πρώτῳ δὲ τῇ ἐπὶ τὰ δεξιὰ κινήσει ἣν κινούμενοι ἀναγκάσθημεν ἐξ ἀρχῆς τοὺς τόπους μετρεῖν κατὰ κύκλον· ἐπεὶ δὲ ἔλθομεν ἐπὶ τὸν $\overline{γ}$ τὸν διπλασιάσαντα ἑαυτὸν καὶ ποιήσαντα τὸν τετράγωνον [s. Note unter ⊙] τὴν πλευρὰν τοῦ $\overline{\Theta}$ ουκέτι [34]) μετροῦμεν δύο τόπους ἵνα ἐπὶ τῷ δεξιῷ τὰ $\overline{Δ}$ θείημεν, ἀλλὰ τρεῖς οὕτως ἵνα τοῦτον τὸν ἔχοντα τὰ $\overline{γ}$ δεύτερον τὸν κατωτέρω τούτου τὸν τρίτον ζητοῦμεν κατωτέρω καὶ ἐπεὶ οὐχ εὑρίσκομεν, ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸν ἀνωτάτω κατ' εὐθεῖαν καὶ μετροῦμεν τοῦτον τρίτον καὶ τιθέαμεν ἐπ' αὐτῷ τούτῳ τὰ $\overline{Δ}$ μὴ παρεκκλίνοντες· εἶτα ὥσπερ ἀρχὴν ἐκεῖθεν λαμβάνοντες μετροῦμεν πάλιν διὰ τῶν $\overline{β}$ καὶ τιθέαμεν τὸν ἑφεξῆς [35]) ἀριθμὸν ἐπὶ τῷ δεξιῷ κατὰ τὴν εἰρημένην ἀκολουθίαν καὶ τοῦτο ποιοῦμεν ὥστ' [36]) ἂν πάλιν ἀφικώ-

*) Es ist dies unseres Wissens das erste Auftreten des Begriffs und Ausdrucks „Herumzählung im Kreise", wo ein solcher eigentlich gar nicht vorhanden ist; als „zyklische Aneinanderreihung", „zyklische Vertauschung" hat sich diese Redeweise bekanntlich in der neueren Mathematik eingebürgert.

μεθα ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ $\overline{\Theta}$ ἐπὶ τὸν $\overline{\Sigma}$ τὸν διπλάσιον τοῦ $\overline{\gamma}$· ἐπὶ τοῦτον γὰρ πάλιν ἀφιγμένοι[37]) μετροῦμεν διὰ τῶν τριῶν καὶ τιθέαμεν τὸν ἐφεξῆς τούτου ἐπὶ τῷ τρίτῳ καὶ παρεκκλίνοντες εἶτα πάλιν μετροῦμεν $\overline{\beta}$ καὶ τιθέαμεν ἐπὶ τῷ δεξιῷ· καὶ τοῦτο μὲν μέχρι τέλους ποιοῦμεν· ὥσπερ δὲ ἐνταῦθα διὰ μὲν τῶν δύο μετροῦμεν ἐπὶ[38]) τῶν ἄλλων ἁπάντων· διὰ δὲ τῶν τριῶν ὅτε μόνον μεταπίπτομεν ἀπὸ πλευρᾶς ἐφ' ἑτέραν πλευρὰν οὕτω καὶ ἐφ' ἁπάντων ποιοῦμεν τῶν ὁμοειδῶν· μετροῦμεν γὰρ κατὰ ταύτην τὴν ἀκολουθίαν· διὰ μὲν τῶν $\overline{\beta}$ μέχρι τῆς πλευρᾶς τῶν τόπων τοῦ προκειμένου τετραγώνου· διὰ δὲ τῶν τριῶν πάλιν, ἵνα μεταπέσωμεν ἐπὶ τὸν ἐφεξῆς καὶ τοῦτο μέχρι τέλους ἀνακυκλουμένων καὶ τῶν τόπων ὥσπερ ἐνταῦθα· καὶ ἁπλῶς πάντα κατὰ τὴν αὐτὴν ἀκολουθίαν συμβαίνει πλὴν τῆς θέσεως τῆς μονάδος· αὕτη[39]) γὰρ οὐκ[40]) ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀεὶ τίθεται, ἀεὶ ἐφ' ἑκάστῳ τετραγώνῳ μεταλλάττει τὴν θέσιν καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τῶν ἀπὸ περιττῶν γινομένων τετραγώνων τίθεται ἐπὶ τῷ μέσῳ τῶν κατωτάτω τόπων· ἐν δὲ τῷ $\overline{\beta}$ ἐπὶ τῷ μέσῳ τῶν μονάδι ἀνωτέρῳ καὶ ἐπὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τῷ μέσῳ τῶν μονάδι πάλιν τούτων ἀνωτέρω καὶ ἁπλῶς ἀνιόντων τῶν ἀριθμῶν ἀνίσει καὶ αὕτη ἐπὶ τῶν τόπων· συμβαίνει δὲ αὐτὴν ἀεὶ τίθεσθαι ἐπὶ τῷ μονάδι κατωτέρῳ κατ' εὐθεῖαν τόπῳ τοῦ μεσαιτάτου πάντων τῶν τόπων τοῦ προκειμένου τούτου τετραγώνου· πάρεστι[41]) δὲ ταῦτα πάντα σαφέστερον ὁρᾶν ἐπὶ τῆς ἀναγραφῆς (Fig. 3, 4, 5.)· διὰ δὲ τῶν τριῶν καὶ πέντε οὕτως ἀναγράφομεν τετράγωνον $\overline{\gamma}$ καὶ περιγράφομεν αὐτῷ τοὺς τόπους τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ· εἶτα τιθέαμεν τὴν μονάδα ἀεὶ ἐπὶ τοῦ μέσου τῶν ἀνωτάτω τόπων καὶ μετροῦμεν τόπους τρεῖς*), ἵνα τὸν ἔχοντα τὴν μονάδα καὶ δύο κατωτέρω τοῦτον ἐφεξῆς καὶ τιθέαμεν ἐπὶ τῷ δεξιῷ τοῦ τρίτου κατ' εὐθεῖαν τὰ $\overline{\beta}$· εἶτα πάλιν ἐκεῖθεν μετροῦμεν τρεῖς τόπους ὁμοίως καὶ τιθέαμεν ἐπὶ τῷ δεξιῷ τὰ $\overline{\gamma}$· εἰ δὲ μὴ ἔχομεν ἐπὶ τῶν δεξιῶν τόπων[42]) ἀναστρέφομεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ κατ' εὐθεῖαν ὥσπερ ἐπὶ τῆς προτέρας μεθόδου καὶ

*) Wir Deutsche würden bei Vergleichung der Figur sagen: wir zählen zwei Stellen ab, indem wir den Ausgangspunkt nicht mitzurechnen gewohnt sind. Ueber diese Eigenthümlichkeit der Griechen, welche auch bei sonstigen mathematischen Fragen wohl berücksichtigt werden muss, hat uns Nesselmann[17]) genaue Auskunft gegegeben. Das gleiche gilt für das folgende *πέντε*.

17) *Nesselmann*, Die Algebra der Griechen, Königsberg 1842. S. 125.

τιθέαμεν αὐτὸν ἐπὶ τῷ τελευταίῳ μὲν τόπῳ ἀπὸ τῆς ἀνακάμψεως· πρώτῳ δὲ τῇ ἐπὶ τὰ δεξιὰ κινήσει· καὶ τοῦτο ποιοῦμεν ἕως ἂν ἔλθωμεν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ προκειμένου τετραγώνου· ἐπ' ἐκείνην γὰρ ἀφιγμένοι μετροῦμεν ε τόπους, ἵνα τὸν ἔχοντα τὴν πλευρὰν καὶ τέσσαρας κατωτέρω τούτου· εἶτα τιθέαμεν ἐπὶ τῷ πέμπτῳ τόπῳ μὴ παρεκκλίνοντες τὸν ἐφεξῆς ἀριθμὸν[43]) τῆς πλευρᾶς· εἶτα πάλιν μετροῦμεν διὰ τῶν τριῶν μέχρι τῆς πλευρᾶς ἀνακυκλοῦντες τοὺς τόπους ὥσπερ ἐπὶ τῆς προτέρας μεθόδου· καὶ τοῦτο μέχρι τέλους ποιοῦμεν· ἔστι δὲ αὕτη ἡ μέθοδος κατὰ πάντα ὅμοια τῇ προτέρᾳ, πλὴν ὅτι ἐκεῖ μὲν ἡ μονὰς ἐν ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ τόπῳ ἐτίθετο, ἐνταῦθα δὲ ἀεὶ ἐπὶ τοῦ μέσου τῶν ἀνωτάτω τόπων, καὶ ὅτι ἐκεῖ μὲν μετροῦμεν διὰ τῶν δύο καὶ τριῶν, ἐνταῦθα δὲ διὰ τῶν τριῶν καὶ πέντε· πάρεστι δὲ ταῦτα σκοπεῖν ἐπὶ τῆς ἀναγραφῆς (Fig. 6, 7, 8.). Καὶ αὗται μὲν αἱ μέθοδοι ἐπὶ τῶν ἀπὸ περιττῶν τετραγώνων· ἐπὶ δὲ τῶν ἀπὸ ἀρτιάκις ἀρτίων ἑτέραι πάλιν εὑρηνται δύο ὧν ἑτέρα μὲν ἔστιν οὕτως (Fig. 9.)· ἀναγράφομεν τόπους τούτου τετραγώνου εἶτα τιθέαμεν σημεῖα οὕτως· ἐπὶ μὲν τοῦ πρώτου τοιούτου τετραγώνου ἐπὶ τῶν ἐν ταῖς διαμέτροις τόπων μόνον οὕτως· ἐπεὶ δὲ ὅτι ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς τετραγώνων πρῶτον μὲν ἐν ταῖς διαμέτροις (Fig. 10, 11.)· εἶτα καὶ οὕτως μετροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτάτω τόπων τέσσαρας ἐφεξῆς τόπους ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἵνα τὸν ἀριθμὸν καὶ τρεῖς ἑτέρους καὶ τιθέαμεν ἐπὶ τῷ τετάρτῳ[44]) σημεῖον καὶ ἐπὶ τῷ δεξιῷ τόπῳ ἐφεξῆς αὐτοῦ καὶ εὐθεῖαν ἕτερον· εἶτα ἀπὸ τούτου μετροῦμεν πάλιν τέσσαρας τόπους καὶ ἐπὶ τῷ τετάρτῳ τιθέαμεν σημεῖον καὶ ἐπὶ τῷ δεξιῷ κατ' εὐθεῖαν· εὐθὺς μετ' αὐτοῦ[45]) ἕτεροι καὶ τοῦτον μέχρι ἂν ἐγχωρυίη· τοῦτο ποιοῦμεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν κύκλῳ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου· εἶτα ἄγομεν σημεῖα ἀπὸ μὲν τοῦ τετάρτου τῶν ἀνωτάτω τόπων εἴ τις ἐπὶ τὰ δεξιὰ μετρεῖ, λοξῶς ἐπὶ τὸν τέταρτον τόπον τῆς ἀριστερᾶς[46]) πλευρᾶς εἴ τις ἐπὶ τὰ κάτω μετρεῖ ὡς συναντᾶν οὕτω τὰ σημεῖα καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον[47]) ποιεῖν ἐπὶ τῆς γωνίας τοῦ τετραγώνου*). ἀπὸ δὲ τοῦ πέμπτου τόπου ἐπὶ τὸν πέμπτον τῆς πλευρᾶς εἴ τις ἐπὶ τὰ ἀνωτάτω μετρεῖ καὶ πάλιν ἀπὸ μὲν τοῦ τετάρτου ὡς ἀπὸ πρώτου τοῦ πέμπτου ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ[48]) λοξῶς· ἀπὸ δὲ τοῦ πέμπτου ἐπὶ τὰ

*) Dieser Ausdruck hat offenbar den Sinn: Sämmtliche in die Zellen provisorisch eingezeichnete Punkte (σημεῖα) müssen zu beiden Diagonalen des Quadrates symmetrisch angeordnet sein.

δεξιὰ καὶ τοῦτο μέχρι τέλους τῶν ἀνωτάτω λοιπῶν τόπων· εἶτα στρέφομεν τὸ τετράγωνον καὶ ποιοῦμεν τὴν κατωτάτω πλευρὰν ἀνωτάτω· καὶ ἄγομεν ἀπ' αὐτῆς τὰ σημεῖα ὁμοίως, ὡς ὁρᾶν πάρεστιν ἐπὶ τῆς ἀναγραφῆς*). μετὰ δὲ τὸ θεῖναι τὰ σημεῖα οὕτως διερχόμεθα τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τοὺς τόπους ὁμοίως τοῦ προκειμένου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτάτω τόπων ἐπὶ τὰ δεξιὰ καὶ τιθέαμεν ἔνθα μὲν εἰσὶ τὰ σημεῖα· παρερχόμεθα τοὺς τόπους μετὰ τῶν συμβαινόντων αὐτοῖς ἀριθμῶν καὶ τοῦτο μέχρι τέλους ποιοῦμεν τῶν τόπων τοῦ τετραγώνου παντός· εἶτα πάλιν ἀρχόμεθα ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ διερχόμεθα τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμοὺς[49]) καὶ τοὺς τόπους τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτάτω τόπων ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ καὶ τιθέαμεν ἔνθα μέν εἰσιν ἀριθμοὶ κενοὶ τόποι τοὺς συμβαίνοντας αὐτοῖς ἀριθμούς. ἐφ' ὧν δέ εἰσιν ἀριθμοὶ παρατρέχομεν αὐτοὺς μετὰ τῶν συμβαινόντων αὐτοῖς ἀριθμῶν· καὶ τοῦτο ποιοῦμεν ἀνατρέχοντες μέχρι τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτάτω τόπων ἀφ' οὗ κατιόντες ἠρξάμεθα· ἵνα σαφέστερον τοῦτο γίνηται μεταχειρισώμεθα ἓν[50]) τῶν τοιούτων τετραγώνων (Fig. 12.)· ἔστω δὲ τὸ πρῶτον τὸ τὴν πλευρὰν ἔχον τὰ $\overline{\Delta}$[51]), ὅπερ ἀναγράφομεν καὶ τιθέαμεν ἐπὶ τῶν ἐν ταῖς διαμέτροις τόπων τὰ σημεῖα οὕτως· εἶτα ἀρχόμεθα ἀπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτάτω τόπων καὶ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τιθέαμεν εὐθὺς ἐπ' αὐτῷ τούτῳ τῷ πρώτῳ τόπῳ τὴν μονάδα, ἐπεὶ ἐξὶν ἐν αὐτῷ σημεῖον· τὸν δὲ δεύτερον τόπον παρερχόμεθα ἐπεὶ οὐκ ἔχει σημεῖον καὶ τὴν δυάδα μετ' αὐτοῦ, ἐπεὶ συμβαίνει αὐτῷ καὶ τὸν τρίτον ὁμοίως παρερχόμεθα τόπον καὶ τὴν τριάδα μετ' αὐτοῦ· ἐπὶ δὲ τοῦ τετάρτου τιθέαμεν τὰ $\overline{\Delta}$ ἐπεὶ ἐστὶν ἐν αὐτῷ σημεῖον· τὸν πέμπτον παρερχόμεθα καὶ σὺν αὐτῷ τὴν πεντάδα· ἐπὶ τῷ ἕκτῳ τιθέαμεν τά $\overline{\varsigma}$ καὶ ἐπὶ τῷ ἑβδόμῳ τὰ $\overline{\zeta}$· τὸν ὄγδοον[52]) παρερχόμεθα καὶ τὰ ὀκτὼ[53]) καὶ τὸν ἔννατον ὁμοίως καὶ τὰ $\overline{\Theta}$· ἐπὶ δὲ τῷ δεκάτῳ τιθέαμεν τὰ $\overline{\iota}$ καὶ ἐπὶ τῷ ἑνδεκάτῳ τὰ $\overline{\iota\alpha}$ τὸν δωδέκατον παρερχόμεθα καὶ τὰ $\overline{\iota\beta}$· ἐπὶ τῷ τρίτῳ καὶ δεκάτῳ τιθέαμεν τὰ $\overline{\iota\gamma}$· τὸν τέταρτον καὶ δέκατον παρερχόμεθα καὶ τὰ $\overline{\iota\Delta}$ καὶ τὸν πέμπτον καὶ δέκα-

*) Die elfte Figur ist (vermuthlich wohl durch Verschuldung des Abschreibers) so korrumpirt, dass sich aus derselben der eigentliche Sinn der Konstruktion nicht mehr entnehmen lässt. Im Grunde genommen ist das Viereck gar kein magisches Quadrat, denn es enthält 16.17=272 Zellen; jede Zeile enthält eine Zelle mehr als eine Kolonne. Auch andere Figuren sind durch falsche Zahlen verunstaltet.

τον[54]) καὶ τὰ ιε· ἐπὶ δὲ τῷ ἕκτῳ καὶ δεκάτῳ τιθέαμεν τὰ ις· εἶτα ἀρχόμεθα πάλιν ἀπὸ τῆς μονάδος· ποιοῦμεν δὲ ἀρχὴν τοῦ τετραγώνου τὸν πρῶτον τῶν κατωτάτω τόπων αὐτοῦ· καὶ μετροῦμεν ἐπὶ τὰ ἀριστερά· παρερχόμεθα δὲ τοῦτον εὐθὺς ἐπεί ἐστιν[55]) ἐν αὐτῷ ἀριθμὸς καὶ μετ' αὐτοῦ τὴν μονάδα ἐπεὶ συμβαίνει αὐτῷ· ἐπὶ δὲ τῷ δευτέρῳ τιθέαμεν τὰ β ἐπεὶ οὐκ ἔστιν[56]) ἐν αὐτῷ ἀριθμὸς καὶ ἐπὶ τῷ τρίτῳ τὰ γ· τὸν τέταρτον παρερχόμεθα καὶ τὰ δ· ἐπὶ τῷ πέμπτῳ[57]) τιθέαμεν τὰ ε· τὸν ἕκτον παρερχόμεθα καὶ τὰ ς[58]) καὶ τὸν ἕβδομον ὁμοίως καὶ τὰ ζ· ἐπὶ τῷ ὀγδόῳ τιθέαμεν τὰ η καὶ ἐπὶ τῷ ἐννάτῳ τὰ θ· τὸν δέκατον παρερχόμεθα καὶ τὰ ι καὶ τὸν ἑνδέκατον ὁμοίως καὶ τὰ ια· ἐπὶ τῷ δωδεκάτῳ τιθέαμεν τὰ ιβ· τὸν τρίτον καὶ δέκατον παρερχόμεθα καὶ τὰ ιγ· ἐπὶ τῷ τετάρτῳ καὶ δεκάτῳ τιθέαμεν τὰ ιδ καὶ ἐπὶ τῷ πέμπτῳ καὶ δεκάτῳ τὰ[59]) ιε· τὸν ἕκτον[60]) καὶ δέκατον παρερχόμεθα καὶ τὰ ις ὡς ἐπὶ τοῦ διαγράμματος σαφέστατα ὁρᾶν πάρεστιν· ταύτῃ δὴ ἀκολουθίᾳ καὶ ἐπὶ τοῖς ὁμοείδεσι[61]) χρησόμεθα καὶ ἡ μὲν μία μέθοδος ἰδοὺ εἴρηται. — μέθοδος ἑτέρα. Ἡ δ' ἑτέρα μέθοδος ἔχει τόνδε[62]) τὸν τρόπον· ἀναστρέφω[63]) τοὺς τόπους τοῦ πρώτου οὕτω δυναμένου τετραγωνισθῆναι [s. Note unter ℐ] τοῦ πλευρὰν ἔχοντος τὰ δ καὶ πληρῶ αὐτοὺς τῶν ἀριθμῶν οὕτως· εἶτα χρῶμαι τούτῳ τῷ τετραγώνῳ ἐπὶ τὰ ἐφεξῆς ὁμοειδῆ τετράγωνα ὡς ἀρχετύπῳ καὶ εἰκόνι· πάντα γὰρ τὰ ἐφεξῆς εἰς τοῦτο διαιρεῖται· αὐτίκα τὸ μετὰ τοῦτο τὴν πλευρὰν ἔχει διπλασίαν τῆς πλευρᾶς τούτου· τὸ δ' ἀπὸ διπλασίας πλευρᾶς γινόμενον ἀεὶ τὸ πᾶν τετραπλάσιον γίνεται τοῦ παντὸς οὗ τῆς[64]) πλευρᾶς τὴν πλευρὰν ἔχει διπλασίαν· διαιρεῖται οὖν τὸ ἐφεξῆς τούτου εἰς τέσσαρα τοσαῦτα· τό δὲ μετὰ τοῦτο πάλιν διπλασίαν μὲν ἔχει τὴν πλευρὰν τῆς πλευρᾶς τούτου τετραπλασίαν δὲ τοῦ πρώτου καὶ γίνεται τὸ πᾶν τούτου μὲν τετραπλάσιον τοῦ πρώτου δὲ οὗ τῆς πλευρᾶς τὴν πλευρὰν εἶχε τετραπλασίαν ἕξ[65]) καὶ δεκαπλάσιον· διαιρεῖται οὖν τοῦτο εἰς δέκα ἕξ[66]) τοσαῦτα· εὑρίσκομεν δὲ ῥαδίως ποσαπλάσιόν ἐστι[67]) τὸ τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· σκοπῶμεν γὰρ πολλαπλασία ἐστὶν ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶς καὶ λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν καθ' ὃν ποσαπλασία ταύτης ἐστὶ καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐφ' ἑαυτὸν καὶ ὁ γινόμενος ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιάσαντος ἀριθμοῦ γίνεται λόγος τοῦ τετραγώνου πρὸς τὸ τετράγωνον· οἷόν ἐστιν ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶς τετραπλασία λαμβάνω τὰ δ[68]) πολλαπλασιάζων ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ καὶ γίνεται ις· ἀποφαίνομαι δὴ τὸ τετράγωνον τὸν ἑκκαιδεκαπλάσιον λόγον ἔχειν

τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. — Ἤδη δὲ ἐπὶ τὴν θέσιν ἰτέον ἥτις ἔχει τόνδε[69]) τὸν τρόπον ἀναγράφομεν μετὰ τὸ πρῶτον οὕτω τετραγωνιζόμενον ὅπερ ἤδη ἐκτέθηται τόπους ἑτέρου τούτου[70]) τετραγώνου καὶ διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ σημείων τινῶν[71]) εἰς ὅσα πρῶτα δύνανται διαιρεθῆναι[72]) τετράγωνα· εἶτα πληρῶμεν τοὺς ἡμίσεις τόπους τῶν τετραγώνων ἐφεξῆς ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτω ἀρχόμενοι ὁρῶντες εἰς τὸ πρῶτον καὶ τιθέντες τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν ἐν αὐτῷ θέσιν· εἶτα ἀπὸ τοῦ κατωτάτω ἀρχόμενοι ἀναποδίζομεν μέχρι τοῦ ἀνωτάτω πληροῦντες τοὺς ἑτέρους ἡμίσεις τόπους τοὺς ὑπολελειμμένους ἐφ' ἑκάσου τετραγώνου· ὁρῶντες πάλιν εἰς τὸ πρῶτον καὶ τιθέντες τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν ἐν αὐτῷ θέσιν· ἀναγεγράφθω δὴ διὰ πλείονα σαφήνιαν ἓν τοιοῦτον τετράγωνον καὶ δειχθήτω ἐν αὐτῷ ἡ θέσις· ἔστω δὲ τὸ μετὰ πρῶτον εὐθὺς ὅπερ ἀναγράφομεν οὕτω καὶ διαιροῦμεν διὰ σημείων[73]) εἰς ὅσα πρῶτα δύναται διαιρεθῆναι[71])· διαιρεῖται δὴ ἐν $\overline{\Delta}$ καὶ πληροῦμεν τοὺς ἡμίσεις τόπους οὕτως· ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτω ἀρχόμεθα καὶ κατιόντες μέχρι τοῦ κατωτάτω· εἶτα ἀπὸ τοῦ κατωτάτω ἀρχόμενοι ἀναποδίζομεν ἐφεξῆς ὅθεν κατίεμεν[75]) μέχρι τοῦ ἀνωτάτω πληροῦντες τοὺς ὑπολελειμμένους κατὰ τὴν ἐν τῷ πρώτῳ θέσιν καὶ γίνεται τὸ πᾶν πεπληρώμενον τοιοῦτον τὰς πλευρὰς ἴσας ἔχον πανταχόθεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἡ αὐτὴ ἀκολουθία (Fig. 13. 14.). Ἰστέον δὲ ὅτι ἐν ταύτῃ τῇ θέσει[76]) ἔνθα ἂν λάβοις τέσσαρας[77]) τόπους τετραγώνοις τὴν πλευρὰν ποιήσεις τοῦ πρώτου τετραγώνου· ὅπερ ἐπὶ τῆς προτέρας οὐ συνέβαινε θέσεως καὶ διαιρουμένων εἰς ἴσα δύο τῶν πλευρῶν τὴν ἴσην ποσότητα ἑκάτερον μέρος ἔχει· τοῦτο δὲ συμβαίνει πλὴν τοῦ πρώτου ἐν ἅπασι καὶ ἄλλα ἔχει γλαφυρὰ καὶ ἀξεῖα ἅπερ ἠρηθεῖσα[78]) οὐκ εἶχε γε.

In dieser abrupten Weise schliesst unsere Vorlage; wir verweisen die kritischen Belege unter die Noten und gehen nun dazu über, die Regeln des Moschopulos mathematisch zu diskutiren und zu begründen.

§. 6. Wenn wir die Quadrate ungerader Zellenzahl zuerst ins Auge fassen, so erkennen wir zwei wesentlich verschiedene Regeln, die jedoch in einem Hauptpunkte einen gemeinschaftlichen Charakter tragen. Das Prinzip des zyklischen Anschlusses der einzelnen scheinbar getrennt liegenden Zellen ist nämlich mit grosser Konsequenz durchgeführt, und man findet hier bereits

Spuren einer verallgemeinernden Auffassung, welche wir früher[18]) der allerneuesten Zeit vindiziren zu müssen glaubten; ja im Grunde genommen ist diese Erweiterung bei Moschopulos eine ganz vollkommene. Denn wir dürfen sagen:

Um ein magisches Quadrat im Sinne des Moschopulos zu erhalten, theile man eine Kugel (oder eine andere durch Deformation in jene überzuführende Fläche) durch zwei Schaaren von m Meridianen und Parallelkreisen in m^2 Zellen ein, denn nur so ist die Forderung zu erreichen, dass jede einzelne Zelle ringsum von anderen umgeben ist.

Gestützt auf diese dem Sinne nach vollständig mit der Vorlage übereinstimmende Formulirung des Begriffes „magisches Quadrat" können wir jetzt die erste Regel des Byzantiners so aussprechen:

Soll eine magische Kugel von $(2n+1)^2$ *Zellen gebildet werden, so setze man die* 1 *in eine willkürliche Zelle — in Wirklichkeit wird, um die Analogie durchführen zu können, diese Zelle durch die Indices* $(n+1)$ *und* $(n+2)$ *bestimmt sein — und setze weiterhin die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in diagonaler Richtung in die leeren Plätze; kommt man hiebei zu einer bereits ausgefüllten Zelle, so gehe man zwei Stellen in der Richtung eines Meridianes hinauf resp. herab.*

Den Beweis für die Richtigkeit dieser Vorschrift anzutreten, haben wir nicht nöthig, denn man erkennt sofort, dass diese Methode durchaus identisch ist mit der Terrassenmethode, welche wir später bei Bachet de Méziriac und Anderen finden werden und deren Diskussion wir bereits früher[19]) gegeben haben. Freilich müssen wir zugestehen, dass wir in jener Abhandlung den wahren Charakter der Moschopul'schen Methode nicht richtig erfasst und dargestellt haben; wir hatten zu jener Zeit noch nicht Einsicht vom Original genommen und uns auf die keineswegs konzinne Schilderung Mollweide's[20]) verlassen.

Das zweite Verfahren, welches unser Kodex lehrt, ist dieses:

---

18) *Günther*, Rezension zu einer Schrift von v. Pessl, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 20. Jahrg. hist.-liter. Abtheil. S. 17. 19) *Id.*, Beweis eines Fundamentalsatzes von den magischen Quadraten, Arch. d. Math. u. Phys. 57. Theil. S. 285 ff. 20) *Mollweide*, *De quadratis* etc. S. 41 ff.

Man trage die 1 *in eine beliebige Zelle — auf dem Papier in die Zelle* $1,\ n+1$ *— ein und besetze nun die weiteren Plätze so, dass je zwei aufeinanderfolgende Zahlen (in der Sprache des Schachspiels ausgedrückt) um einen Springerzug abstehen. Kommt man dabei — was stets bei der Zahl* $p\,(2n+1)$ *stattfindet — an ein schon besetztes Feld, so gehe man um 4 Zellen in der Richtung des Meridians fort.*

Dass diess sich wirklich so verhalte, ist für die Kolonnen und Zeilen leicht, für die Diagonalen dagegen nur schwer zu erweisen. Betrachten wir diejenige Kolonne, in welcher die Zahl $p\,(\geqq 1,\ \leqq 2n+1)$ vorkommt, so haben wir zuerst zu summiren die arithmetische Reihe

$$\begin{aligned} &p\\ &p+1(2n+2)\\ &p+2(2n+2)\\ &\quad\vdots\\ &p+(2n-p+2)(2n+2), \end{aligned}$$

dann aber noch die weitere

$$\begin{aligned} &p+(2n-p+2)(2n+2)+1\\ &p+(2n-p+2)(2n+2)+1+1\,(2n+2)\\ &p+(2n-p+2)(2n+2)+1+2\,(2n+2)\\ &\qquad\vdots\\ &p+(2n-p+2)(2n+2)+1+(p-3)(2n+2), \end{aligned}$$

und die Ausführung dieser beiden Summationen ergiebt wieder den Werth

$$\Sigma = (2n+1)(2n^2+2n+1).$$

Bei derjenigen Zeile, in welcher p vorkommt, ist die erste arithmetische Reihe diese:

$$\begin{aligned} &p\\ &p+1.2n\\ &p+2.2n\\ &\quad\vdots\\ &p+(p-1)2n, \end{aligned}$$

die zweite

$$p + (p-1)2n + 4n + 1$$
$$p + (p-1)2n + 4n + 1 + 1.2n$$
$$p + (p-1)2n + 4n + 1 + 2.2n$$
$$\vdots$$
$$p + (p-1)2n + 4n + 1 + (2n-p)2n,$$

die Summe also wieder

$$\Sigma = (2n+1)(2n^2 + 2n + 1).$$

Was nun die Berechnung der Diagonalensummen so höchst komplizirt macht, ist weniger der Umstand, dass in jeder Diagonale vier arithmetische Progressionen auftreten, als vielmehr der, dass das Gesetz, nach welchem dieselben aufeinander folgen, ein minder einfaches ist als in den vorher betrachteten Fällen.

Ist nämlich, wie diess aus der Regel hervorgeht, $(n+1)$ die in der untersten Ecke rechts befindliche Zahl, so schreiten die der von hier ausgehenden Diagonalreihe angehörigen Zahlen in einer arithmetischen Reihe erster Ordnung fort, deren konstante Differenz den Werth $2(n-1)$ hat. An einer bestimmten Stelle nun bricht diese Progression ab, und es tritt an ihre Stelle eine neue, deren Anfangsglied um $(4n-1)$ grösser ist als das Endglied der vorangegangenen. Die Differenz der neuen Progression ist identisch mit der der ersten, und der hier beschriebene Vorgang wiederholt sich nun noch zweimal, wobei zu bemerken, dass die beiden in der Mitte befindlichen Reihen gleichviel Glieder aufweisen. Sobald man also weiss, aus wievielen Gliedern die erste der vier Progressionen besteht, kann man sofort die entstehende Summe berechnen. Es lehrt nun die direkte Betrachtung der Figur, dass diese Anzahl gruppenweise fortschreitet. Das Gesetz kann so ausgesprochen werden:

Theilt man die Zahlen $(n+1)$, *von* $n = 0$ *angefangen, in Tripel (Gruppen von je dreien) ab, so hat für jeden Tripel die erste Reihe gleichviel Glieder; da sie aber für den ersten Tripel nur ein einziges Glied besitzt, so gehören dem sten s Glieder zu. Jede der mittleren Reihen ist, für die Zahl der Zellen* $= 2n + 1$, *aus x Gliedern zusammengesetzt; zur Bestimmung dieses x dient*

die Wahrnehmung, dass die letzte Progression für den sten Tripel aus $(s-1)$ *Gliedern besteht.*

Hierauf gründet sich die Berechnung von x folgendermassen. Verstehen wir unter q eine willkürliche ganze Zahl, so gehören dem Vorstehenden zufolge die drei Zahlen $3q$, $3q-1$, $3q-2$ dem nämlichen Tripel an. Ist also bezüglich x_1, x_2, x_3 die Anzahl der Glieder in den mittleren Progressionen, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$q + 2x_1 + q - 1 = 2n + 1 = 6q - 1,$$
$$q + 2x_2 + q - 1 = 2n + 1 = 6q - 3,$$
$$q + 2x_3 + q - 1 = 2n + 1 = 6q - 5.$$

Löst man diese Gleichungen auf, so erkennt man die Wahrheit des Satzes:

Je nachdem die Zahl $(n+1)$ *von einer der drei Formen* $3q$, $3q-1$, $3q-2$ *ist, besteht jede der mittleren Reihen bezüglich aus*

$$2q,\ 2q-1,\ 2q-2$$

Gliedern, während in jedem dieser drei Fälle die beiden äusseren Reihen resp. q *und* $(q-1)$ *Glieder zählen.*

Hiermit sind denn alle Daten zur Ausrechnung gegeben, und es erhellt, dass dieselbe eigentlich, den drei unterschiedenen Fällen entsprechend, eine dreifache sein müsste. Wir wollen uns jedoch auf die erste Annahme, $n+1 = 3q$, beschränken.

Alsdann ist die Summe so zu bilden:

I.
$$3q$$
$$3q + 1(6q-4)$$
$$3q + 2(6q-4)$$
$$\vdots$$
$$3q + (q-1)(6q-4);$$

II.
$$3q + (q-1)(6q-4) + 12q - 5$$
$$3q + (q-1)(6q-4) + 12q - 5 + 1(6q-4)$$
$$3q + (q-1)(6q-4) + 12q - 5 + 2(6q-4)$$
$$\vdots$$
$$3q + (q-1)(6q-4) + 12q - 5 + (2q-1)(6q-4);$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } & 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +1(6q-4) \\
& 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +2(6q-4) \\
& \qquad \vdots \\
& 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +(2q-1)(6q-4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV. } & 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +(2q-1)(6q-4)+12q-5+1(6q-4) \\
& 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +(2q-1)(6q-4)+12q-5+2(6q-4) \\
& \qquad \vdots \\
& 3q+(q-1)(6q-4)+12q-5+(2q-1)(6q-4)+12q-5 \\
& \qquad +(2q-1)(6q-4)+12q-5+(q-2)(6q-4).
\end{aligned}$$

Diese Summe hat den Werth

$$\Sigma = 108q^3 - 30q^2 = 12q - 1,$$

oder, da, wie wir voraussetzten, $q = \frac{n+1}{3}$ ist,

$$\Sigma = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (2n+1)(2n^2 + 2n + 1).$$

In ähnlicher Weise kann nun auch die Verifikation für die andere Diagonale durchgeführt werden. Wir glauben hoffen zu dürfen, dass die hier angestellten Untersuchungen auch vom allgemein-zahlentheoretischen Standpunkte aus Interesse beanspruchen können.

50	112	38	110	26	98	1	86	158	74	146	62	134
8	80	165	68	153	56	141	44	129	32	117	20	92
135	51	123	39	111	14	99	2	87	159	75	147	63
93	9	81	166	69	154	57	142	45	130	33	105	21
64	136	52	124	27	112	15	100	3	88	160	76	148
22	94	10	82	167	70	155	58	143	46	118	34	106
149	65	137	40	125	28	113	16	101	4	89	161	77
107	23	95	11	83	168	71	156	59	131	47	119	35
78	150	53	138	41	126	29	114	17	102	5	90	162
36	108	24	96	12	84	169	72	144	60	132	48	120
163	66	151	54	139	42	127	30	115	18	103	6	91
121	37	109	25	97	13	85	157	73	145	61	133	49
79	164	67	152	55	140	43	128	31	116	19	104	7

Durch Betrachtung eines speziellen Falles, z. B. des in vorstehendem Schema dargestellten, kann man leicht auch noch die Existenz gewisser anderer Beziehungen herausfinden. Da es deren viele giebt, und die Art und Weise, in welcher man sich der empirisch gewonnenen Thatsachen mathematisch zu versichern vermag, im wesentlichen nicht von den bereits vorgeführten Mustern abweicht, so begnügen wir uns, zwei derselben einfach anzuführen; die erste Eigenschaft wurde bereits von Mollweide[21]) bemerkt.

I. Addirt man in einem nach der zweiten Regel des Moschopulos konstruirten Quadrate von $(2n+1)^2$ *Zellen zwei auf verschiedenen Seiten einer Diagonalreihe parallel laufende Zahlenserien von zusammen* $(2n+1)$ *Termen, so resultirt wieder die Summe* $(2n+1)(2n^2+2n+1)$.

II. Lässt man diejenigen Züge, bei welchen ein Aufsteigen um vier Felder verlangt wird, ebenfalls als Springerzüge gelten, so kann man sagen: Die zweite Regel des Moschopulos besetzt die Felder durch die einzelnen Züge eines Rösselsprunges und zwar ist derselbe geschlossen, d. h. das Endfeld steht vom Anfangsfeld um einen einzigen Springerzug ab.

§. 7. Während der erste Abschnitt des griechischen Traktates die Konstruktion magischer Quadrate von ungerader Zellenzahl lehrt, beschränkt sich der zweite Theil auf Zahlen, die durch 4 ohne Rest theilbar sind, denn diess ist die Bedeutung des Wortes *ἀρτιάκις ἄρτιος*[22]). Wahrscheinlich folgte

21) *Id.*, Math. Wörterbuch, S. 21. 22) *Nesselmann*, S. 158.

ursprünglich noch ein Kapitel, welches sich mit beliebigen ganzen Zahlen, den „ἀριθμοὶ ἀρτιάκις περιττοί", beschäftigte, indess ist dasselbe in der uns vorliegenden Kopie verloren gegangen, und so müssen wir uns denn mit der Besprechung dieses speziellen Falles begnügen.

Zur besseren Versinnlichung bedienen wir uns des beigefügten nach Moschopulos' erster Vorschrift angefertigten Quadrates von 144 Zellen:

1	143	142	4	5	139	138	8	9	135	134	12
132	14	15	129	128	18	19	125	124	22	23	121
120	26	27	117	116	30	31	113	112	34	35	109
37	117	116	40	41	103	102	44	45	99	98	48
49	95	94	52	53	91	90	56	57	87	86	60
84	62	63	81	80	66	67	77	76	70	71	73
72	74	75	69	68	78	79	65	64	82	83	61
85	59	58	88	89	55	54	92	93	51	50	96
97	47	46	100	101	43	42	104	105	39	38	108
36	110	111	33	32	114	115	29	28	118	119	25
24	122	123	21	20	126	127	17	16	130	131	13
133	11	10	136	117	7	6	140	141	3	2	144

Hier haben wir, was die mathematischen Schwierigkeiten anbelangt, gerade den umgekehrten Fall wie bei den Quadraten ungerader Zellenzahl: Für die Diagonalen erhellt die Sache sofort, auch für die Zeilen ist der Beweis leicht zu leisten, am komplizirtesten — wenn auch lange nicht in dem Masse, wie damals — gestaltet sich die Beweisführung für die Kolonnen.

Ist $16m^2$ die Anzahl der Zellen, so bleibt für jede einzelne Reihe der Werth

$$\Sigma = \frac{16m^2(16m^2+1)}{2.4m} = 32m^3 + 2m.$$

Dann hat man für die beiden Diagonalreihen folgende Summe zu bilden:

$$\begin{array}{ll} 1 & 4m \\ 1+1(4m+1) & 4m+1(4m-1) \\ 1+2(4m+1) & 4m+2(4m-1) \\ \vdots & \vdots \\ 1+(4m-1)(4m+1); & 4m+(4m+1)(4m-1), \end{array}$$

und in beiden Fällen folgt

$$\Sigma = 32m^3 + 2m.$$

Wenden wir uns jetzt zu den Horizontalreihen. Wollten wir hier ganz streng verfahren, so müssten wir vier Einzelfälle unterscheiden; da aber der Gang der gleiche bleibt, so bescheiden wir uns mit erschöpfender Diskussion eines einzelnen derselben. Wir beschränken uns auf die obere Hälfte des Quadrates und fassen diejenige Zeile ins Auge, in welcher die Zahl $(4mq + 1)$ vorkommt, unter q eine beliebige positive Zahl $< 2m$ verstanden. Dann kann man, wie sich unmittelbar aus der Konstruktion selbst ergiebt, die Hälfte der dieser Zeile angehörigen Zahlen in zwei arithmetische Progressionen zerlegen; es ist nämlich, wenn Σ' diese Summe bezeichnet,

$$\begin{aligned}\Sigma' = \quad & 4mq + 1 \\ & + 4mq + 1 + 3 \\ & + 4mq + 1 + 4 \\ & + 4mq + 1 + 7 \\ & + 4mq + 1 + 8 \\ & \quad \vdots \\ & + 4mq + 1 + 2(2m - 1) - 3 \\ & + 4mq + 1 + 2(2m - 1) - 2\end{aligned}$$

$$= 8m^2q + 2m + 3 + 7 + \cdots + 2(2m-1) - 3 + 4 + 8 + \cdots + 2(2m-1) - 2.$$

Es sind sonach $2m$ Zahlen von der Summe Σ'' in der Zeile übrig. Durch eine einfache Abzählung ergiebt sich uns die Relation

$$\begin{aligned}\Sigma'' = \quad & (4m - q)4m + 2 \\ & + (4m - q)4m + 2 + 1 \\ & + (4m - q)4m + 2 + 4 \\ & + (4m - q)4m + 2 + 5 \\ & \quad \vdots \\ & + (4m - q)4m + 2 + 2(2m - 1) - 2 \\ & + (4m - q)4m + 2 + 2(2m - 1) - 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= 32m^3 - 8m^2q + 4m + 4 + 8 + \cdots + 2(2m - 1) - 2 \\ + 1 + 5 + \cdots + 2(2m - 1) - 1.\end{aligned}$$

Bei der Addition heben sich sofort die q enthaltenden Glieder

auf, und man bekommt

$$\Sigma' + \Sigma'' = 32m^3 + 2m.$$

Ganz analog wird man schliesslich auch den Kolonnen gegenüber sich verhalten, so dass ein ausführlicheres Behandeln derselben nichts Neues liefern würde. Bemerken wollen wir noch, dass Mollweide[23]) auch diess Verfahren anführt und kommentirt; jedoch nennt er weder Moschopulos als Urheber, noch auch giebt er einen eigentlichen Beweis. Man kann überhaupt leicht die Wahrnehmung machen, dass die wenigen neueren Mathematiker, welche sich mit magischen Quadraten beschäftigt haben, lieber selbst neue und elegante Methoden zu erfinden, als sich in das eigentliche Wesen jener älteren empirischen Regeln zu versenken geneigt waren, und in der That mag diess oft nicht weniger schwierig sein als die eigene schöpferische Thätigkeit, ohne doch anscheinend gleichmässig die Mühe zu lohnen.

Nun noch ein kurzes Schlusswort über die zweite Methode des Moschopulos zur Bildung gerad-gerader Quadrate. Die Grundzüge derselben sind diese. Man schreibe zuerst wieder, nur nach einer etwas abweichenden Regel, die 8 ersten Zahlen in 8 bestimmte Felder des 16zelligen Quadrates ein. Gälte es dann blos, dieses Quadrat selbst fertig herzustellen, so hätte man einfach die leergebliebenen Plätze durch „ἀναστρέφειν", d. h. durch eine der früher beschriebenen ähnliche Operation zu füllen. Ist aber allgemein das Quadrat $(4m)^2$zellig, so zerlege man es in einzelne unmittelbar an einander grenzende Elementarquadrate von 16 Zellen und behandle jedes einzelne derselben in der angegebenen Weise, so zwar, dass in die oberste Zelle links, wenn die höchste ins vorangehende Quadrat eingeschriebene Zahl t war, nunmehr die Zahl $(t + 1)$ gehört. Hat man so $8m^2$ Zellen des grossen Quadrates durchlaufen, so kehrt man das Quadrat um, d. h. man macht das rechts unten befindliche Elementarquadrat zum Ausgang einer Operation, welche, im entgegengesetzten Sinne durchgeführt, die noch übrigen $8m^2$ Zellen vornimmt. Die Methode ist elegant, steht aber an Uebersichtlichkeit der zuerst gegebenen nach.

Nachdem wir im Vorstehenden der Schrift des Moscho-

23) *Mollweide*, Wörterbuch, S. 22.

pulos sowohl in formeller wie mathematischer Beziehung die Würdigung haben angedeihen lassen, welche sie mit Recht fordern kann, verlassen wir das Mittelalter und wenden uns der neueren Zeit zu.

§. 8. Mehrere Jahrhunderte hindurch fehlen jetzt die magischen Quadrate vollständig in der Literatur. Gleichwohl dürfen wir nicht annehmen, man habe in jener Periode gar keine Kenntniss von ihnen gehabt, nur trat eben der rein wissenschaftliche Charakter völlig gegen die mystische Spielerei zurück. Dergleichen lag im Zeitgeschmack begründet, und wir haben ja bereits in §. 3. gesehen, wie die Araber die Lehre von den magischen Quadraten als integrirenden Bestandtheil ihrer Dämonologie betrachteten, ja wir können das ganze Mittelalter hindurch das Zauberquadrat — das ja noch heute durch seinen Namen an eine dunkle Vorzeit mahnt — als das arithmetische Seitenstück des Sternpolygons wenigstens vermuthen. Fehlt es auch an direkten Belegen, so legen uns doch andere Erscheinungen, welchen wir begegnen, diese Auffassung nahe. Dass die Kabbalistik den magischen Quadraten Werth beimass, ist sicher, und wir werden dafür später die Beweise beibringen; ein Seitenstück zu ihnen bilden die Abracadabra-Regeln, deren Wesen eben auch darin bestand, dass durch alle möglichen Buchstabenkombinationen stets das nämliche Wort erhalten wird. „Der von dem basilidischen Arzte Sammonicus gegebenen Gebrauchsanweisung zufolge," sagt Jahn[24]), „soll dieses Wort so geschrieben werden, dass das Dreieck

a b r a c a d a b r a
a b r a c a d a b r
a b r a c a d a b
a b r a c a d a
a b r a c a d
a b r a c a
a b r a c
a b r a
a b r
a b
a

24) *Jahn,* Wörterbuch der angewandten Mathematik, 1. Band, Leipzig 1845. S. 9.

entstehe. Auf diese Weise kommt immer das Wort *A.* heraus, man mag nun, von *A* anfangend und mit dem letzten Buchstaben der ersten Zeile schliessend, beim Lesen in eine Zeile überspringen, in welche man will".

Direkt an dieses Wort erinnert das erste, allerdings noch sehr unvollständige magische Quadrat, welches wir historisch nachzuweisen im Stande sind. Dasselbe findet sich in einem alten italienischen Rechenbuche[25]) und ist, wie die Abbildung (Figur 15.) zeigt, in mehr als einer Hinsicht mangelhaft. Es hat 49 Zellen und doch nur 7 verschiedene Elemente, so dass also jedes derselben 7mal in einer eigenthümlichen Anordnung*) vorkommen muss. Eine andere Unvollkommenheit liegt darin, dass unter diesen Umständen zwar die Zeilen und Kolonnen sowie die eine der beiden Diagonalen die verlangte Summe 47 liefern, die andere Diagonale dagegen blos 28. Offenbar wusste der wälsche Rechenmeister nichts von den vollkommeneren Methoden, die schon mindestens 100 Jahre früher aufgefunden waren**).

§. 9. Die soeben bei einem Italiener nachgewiesene Unbekanntschaft mit den Leistungen des Moschopulos wird uns um so mehr überraschen, wenn wir bei einem Deutschen, und noch dazu bei einem nicht eigentlich der Gelehrtenzunft angehörigen Manne, die entgegengesetzte Erfahrung machen. Die nunmehr zu beleuchtende Erscheinung ist von hohem mathematisch-historischem Interesse, und fast unbegreiflich muss es erscheinen, dass gerade von dieser Seite her noch gar nicht auf dieselbe hingewiesen wurde:

---

*) Der Charakter dieser Anordnung lässt sich am bequemsten übersehen, wenn wir uns vorstellen, die in das Quadrat eingetragenen Zahlen repräsentirten eine Determinante. Dieselbe würde dann in diejenige Klasse gehören, welche wir bei einer anderen Gelegenheit[26]) als „doppelt-orthosymmetrisch" bezeichnet haben.

**) Man beachte die im Giebelfelde stehenden Worte: *Suma per „cadaura" faza fara.* 47. Dieselben begründen unseren Ausspruch von vorhin.

---

25) *Libro de abaco che insegnia a fare ogni raxone marcadànlib & apertegare le terre con larte di la geometria & altre nobilissime raxone straordinarie cò la tarifa come raspondeno li pexi & monete de molte terre del mondo con la inclita citta de Venetia.* Impresso in Venetia de lanno MDXV nel mese di febraro. Bl. 17. 26) *Günther*, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875. S. 93.

Das erste vollkommene magische Quadrat, welchem wir im Abendlande begegnen, ist das des Albrecht Dürer.

Schon Tausende haben den berühmten Holzschnitt des grossen Künstlers, welcher die „Melancholie", d. h. eigentlich den allegorisch aufgefassten Geist unbefriedigten Sinnens und Grübelns darstellt, und dabei auch wohl die Attribute betrachtet, welche der Figur in reicher Auswahl zur Seite gestellt sind. Unter diesen Attributen befindet sich nun auch ein magisches Quadrat, und da nach Nagler's[27]) Angabe das Bild im Jahre 1514 entstand, so ist dasselbe gewiss das erste, welches zur Zeit nachgewiesen werden kann.

Dass zahlreiche kunsthistorische Schriften, welche von Dürer handeln, einer solchen „Nebensache" gar keine Erwähnung thun, darf nicht auffallen; um so höher aber sind die Ausnahmen von dieser Regel zu achten. In diese letztere Kategorie gehören zumal die Schriften von Heller und v. Eye. Ersterer[28]) sagt darüber: „Auch werden jene Wissenschaften sinnbildlich dargestellt, in welchen man nur durch vieles Nachdenken einen Grad der Vollkommenheit erhalten kann. So ist über ihrem" — der Melancholie — „linken Flügel das von mehreren Gelehrten, z. B. von Cornelius Agrippa, Theophrastus Paracelsus Bombastus v. Hohenheim etc. beschriebene magische Quadrat. Man mag nämlich diese Zahlen zusammennehmen, wie man will, so kommt 34 heraus". Die andere Quelle bemerkt[29]): „Eine Leiter, die an der Mauer lehnt, deutet die Richtung des Gedankens nach oben an. Ueber dem Genius hängt die Wage, in welcher die Gegensätze ins Gleichgewicht gesetzt werden. Daneben ist die Sanduhr und eine Tafel mit dem wunderbaren Zahlenquadrate befestigt, dessen einzelne Ziffern, von allen Seiten zusammengerechnet, immer dieselbe Summe ergeben".

Betrachten wir nun das — 16zellige — Quadrat selbst (Figur 16.), so erkennen wir, dass es in seiner Bildung eine grosse Aehnlichkeit mit dem Figur 12. dargestellten aufweist, ohne doch mit ihm völlig identisch zu sein. Der besseren Uebersicht halber stellen wir beide Quadrate hier

27) *Nagler*, Albrecht Dürer und seine Kunst, München 1837. S. 105. 28) *Heller*, Das Leben und das Wirken Albrecht Dürer's, 2. Band, Leipzig 1831. S. 471. 29) *v. Eye*, Leben und Wirken Albrecht Dürer's, Nördlingen 1860. S. 353.

einander gegenüber, indem wir diejenigen Ziffern, bezüglich deren in der Stellung eine Verschiedenheit obwaltet, durch stärkeren Druck hervorheben.

Dürer:				Moschopulos:			
1	**14**	**15**	4	1	**15**	**14**	4
12	**7**	**6**	9	12	**6**	**7**	9
8	**11**	**10**	5	8	**10**	**11**	5
13	2	3	16	13	3	2	16.

Die unmittelbare Beschauung lässt erkennen, dass Dürer's Viereck nach der Regel des Griechen gefertigt ist, dass man aber bereits zu jener Zeit kleine symmetrische Vertauschungen gewisser Zahlenreihen anzubringen verstand. Oder wollte man diese Kenntniss von den Eigenschaften der magischen Quadrate, mit Ueberspringung des Moschopulos, direkt auf arabischen Ursprung zurückführen? Wir wagen es nicht, diese Frage zu entscheiden; jedenfalls steht fest, dass beim Beginne des sechzehnten Jahrhunderts die Bekanntschaft mit diesen Gebilden bereits eine ziemlich allgemeine war.

§. 10. Wer war es nun, der die im Stillen bereits weit verbreitete Kunde von den magischen Quadraten zu einer öffentlichen machte, wem verdankt sie ihr wissenschaftliches Bürgerrecht? Damüssen wir fast mit Beschämung, gestehen, dass diess Verdienst keinem Mathematiker angehört, dass vielmehr auch jetzt noch die rein szientifische Seite völlig neben dem mystischen Beiwerk verschwand, mit welchem eine zu superstitiösen Träumereien hinneigende Zeit den einfachen Grundgedanken verquickt hatte. Zwei unter den Polyhistoren jener Sturm- und Drangperiode hervorragende Männer sind es, welche die allgemeine Aufmerksamkeit auf einen bisher wohl nur als rechnerische Spielerei aufgefassten Gegenstand lenkten, Agrippa v. Nettesheim und Theophrastus Paracelsus. Der erstere widmet in seinem berühmten, beziehungsweise berüchtigten Hauptwerke[30]) ihnen ein eigenes Kapitel *„De Planetarum mēsulis, earumque virtutibus et formulis, et que illis praeficiātur, divina nomina, intelligētie et demonia“*[31]). Jedem Planeten gehört ein bestimmtes magisches Quadrat zu; deren Eigenschaften können uns hier, da wir nicht Kultur-

30) *Henrici Cornelii Agrippae ab Nettesheym De occulta philosophia libri tres,* Coloniae MDXXXIII. 31) *Ibid.* S. 149 ff.

geschichte schreiben, sehr gleichgültig sein. Wie er sie aber konstruirt habe, darüber schweigt er leider vollständig, und es bleibt uns somit nur übrig, seine Vorlage zu errathen. In der Mehrzahl der Fälle ist diess nun sehr leicht, denn man bemerkt sofort:

Sowohl die ungeraden, als auch die gerad-geraden Quadrate, welche bei Agrippa vorkommen, sind in der Weise des Moschopulos gebildet.

Von sonstigen Quadraten kommt nur das 36zellige noch vor, über dessen Bildungsweise der nächste Paragraph uns Aufklärung verschaffen wird. Aehnliche Beweggründe, wie Agrippa, haben auch den genialen Theophrastus bewogen, das Wesen der magischen Quadrate auseinanderzusetzen[32]). Derselbe steht noch ganz auf ptolemäischem Boden und weist jedem Planeten ein Quadrat von um so mehr Zellen zu, je näher er der Erde sich befindet*). Demnach besitzen Saturn, Mars, Venus und Mond Quadrate von ungerader Zellenzahl; dieselben befolgen die Vorschriften des Moschopulos. Die drei für Jupiter, Sonne und Merkur bestimmten geradzelligen Quadrate geben wir hier wieder:

16	3	2	13	6	32	3	34	35	1	8	58	59	5	4**)	62	63	1
5	10	11	8	7	11	27	28	8	30	49	15	14	52	53	11	10	56
9	6	7	12	19	14	16	15	23	24	41	23	22	44	45	19	18	48
4	15	14	1	18	20	22	21	17	13	32	34	35	29	28	38	39	25
				25	29	10	9	26	12	40	26	27	37	36	30	31	33
				36	5	33	4	2	31	17	47	46	20	21	43	42	24
										9	55	54	12	13	51	50	16
										64	2	3	61	60	6	7	57

*) Bei Theophrastus wiegt, im Vergleich mit Agrippa, die medizinische Verwendbarkeit der Zauberquadrate vor. Wir führen als Beleg hiezu an[33]), dass das „*Sigillum Saturni*“, wenn es in der Fig. 17. angegebenen Weise aus Villacher Blei gefertigt ist und auf dem Revers das Bild des Gottes Saturn selbst zeigt, in Kindesnöthen höchst vortheilhaft wirken und einen Reiter davor behüten soll, Schaden von seinem Pferde zu erleiden. Freilich macht Sieber (a. a. O.) darauf aufmerksam, dass Paracelsus selbst in einer anderen Schrift die Nutzlosigkeit solcher Geheimmittel verspottet.

**) Im Original steht 6 anstatt 4; überhaupt sind sämmtliche Diagramme durch Druckfehler sehr verunstaltet.

32) *Aureoli Philippi Theophrasti Paracelsi ab Hohenheim operum* Vol. II., Genevae MDCLIIX. S. 715 ff. 33) *Rixner* und *Siber*, Leben

Das vier- und achtzellige Quadrat kennen wir bereits; betreffs des ungerad-geraden gilt die soeben bei Agrippa gemachte Bemerkung. Aus unserer Darstellung geht mit Sicherheit Folgendes hervor:

Schon vor der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts wusste man nicht allein die Regeln des Moschopulos fertig zu handhaben, man wagte es bereits sie zu variiren und gieng sogar in der Konstruktion solcher Quadrate, deren Zellenzahl weder von der Form $(2n + 1)$, *noch auch* $4m$ *war, über die Byzantiner hinaus.*

§. 11. Von einem mehr wissenschaftlichen und den mystischen Zuthaten fremden Standpunkte scheint zuerst Adam Riese die Sache aufgefasst zu haben. Freilich stammt diejenige Ausgabe seines Werkes[34]), auf welche wir uns hier beziehen, aus dem Jahre 1550, und bei der überaus grossen Verschiedenheit, welche in den einzelnen Editionen herrscht, ist es nicht eben leicht mit Genauigkeit festzustellen, wo sich die erste Notiz über diese Materie findet. Keinesfalls aber dürfen wir annehmen, dass erst Stifel's im Jahre 1544 erschienenes Buch auf den berühmten Rechenmeister bestimmend gewirkt habe, wie denn auch seine und Stifel's Methoden auseinandergehen.

Bezüglich der Quadrate von ungerader Zellenzahl steht Riese ganz auf Moschopul'schem Boden, und zwar ist es hier, wie auch in allen vorangegangenen Fällen die erste übersichtlichere Regel, die allein zur Anwendung kommt.

Bei der Konstruktion gerader Quadrate dagegen ist Riese's Verhalten durchaus originell, insofern er für diese ganze Klasse von Quadraten eine allgemeine Methode aufzufinden bestrebt ist.

Der betreffende Abschnitt beginnt[35]) folgendermassen: „Hie sol ein jeder wissen das 2 mal 2 als 4 nicht zugleich komen kan, dan 1, 2, 3, 4 in eine gevierdt gesetzt so an jene ziehen thut in vier gantze das nichts bleibt unmöglich, Creutzweis mag das sein, aber fur sich und under sich nicht".

1 2
3 4.

---

und Lehrmeinungen berühmter Physiker am Ende des XVI. und am Anfange des XVII. Jahrhunderts, Sulzbach 1819. S. 88. 34) A. *Riese*, Rechenung nach der lenge, auff der Linichen und Feder, Leipzig 1550. 35) *Ibid.* Bl. 102.

Alsdann, um das 16zellige Quadrat zu bilden, schreibt er 16 unmittelbar aufeinanderfolgende Ziffern — die Erkenntniss, dass dabei nicht nothwendig die Einheit sein müsse, scheint uns auch einen kleinen Fortschritt zu repräsentiren — ins Quadrat und fährt dann fort: „In meinem vorigen Büchlein, so 1522 in Erffurdt getrukt, hab ich gelernt*), verwechselung auswendig und inwendig uber eck, darbey las ich noch beruhen, stet

5	6	7	8		20	6	7	17
9	10	11	12		9	15	14	12
13	14	15	16		13	11	10	16
17	18	19	20		8	18	19	5“.

Dass diese hübsche Umtauschung symmetrisch gelegener Elemente ein richtiges Resultat ergiebt, leuchtet sofort ein; es würde sich aber die Frage aufwerfen lassen, ob der Kunstgriff eine Ausdehnung auf komplizirtere Quadrate ertrage. Jedenfalls war Riese dieser Ansicht, denn er macht es bald darauf mit dem 36zelligen Quadrate ebenso. Wir bilden, ganz wie oben, Schema und Resultat nebeneinander ab:

1	2	3	4	5	6		1	35	34	3	32	6
7	8	9	10	11	12		30	8	28	27	11	7
13	14	15	16	17	18		24	23	15	16	14	19
19	20	21	22	23	24		13	17	21	22	20	18
25	26	27	28	29	30		12	26	9	10	29	25
31	32	33	34	35	36		31	2	4	33	5	36.

In der That ist, nach Mollweide[36]) — der übrigens von Riese's Priorität nichts zu wissen scheint —, diess Verfahren ein allgemein anwendbares. Wir werden später noch darauf zurückzukommen haben.

§. 12. Der wissenschaftliche Sinn des deutschen Volkes konnte es nicht ertragen, die aus anderen Ländern überkommenen Regeln einfach sklavisch als solche zu adoptiren, und so treffen wir denn schon bei Riese, ja eigentlich schon bei Dürer, auf Versuche, das neue Gebiet selbstständig zu bearbeiten. Waren diese Versuche noch schüchtern und wenig weit

*) Eine jetzt ausser Gebrauch gekommene Form, welche zeigt, dass damals auch in der Schriftsprache das Wort „lernen“ transitiv sein konnte.

36) *Mollweide*, Wörterbuch, S. 24 ff.

ausholend, so dürfen sie doch als vorbereitend angesehen werden für die Thätigkeit des Mannes, mit dem wir uns von jetzt ab zu beschäftigen haben werden. Diess ist Michael Stifel, neben Tartaglia im Fache der reinen Mathematik vielleicht die grösste Kapazität seines Jahrhunderts.

Dass dieser Mann die Lehre von den magischen Quadraten wesentlich gefördert habe, war natürlich längst bekannt, aber dem eigentlichen Wesen seiner Methoden scheint man — wohl weil sie des übersichtlichen Charakters der älteren Regeln allerdings entbehren — nicht näher getreten zu sein. So sagt u. a. Cantor[37]): „Höchst sinnreich sind die Methoden, welche im dritten Kapitel des ersten Buches auseinandergesetzt sind, und deren Beweis manche Schwierigkeiten darbieten dürfte". Nur Mollweide[38]) hat, um ihm Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, die vorhandene Lücke auszufüllen gesucht; jedoch kann man leider nicht sagen, dass seine Paraphrase, trotzdem sie in der abkürzenden Sprache der Buchstabenrechnung vorgetragen wird, die Sache so deutlich macht, wie es zu wünschen wäre.

Stifel's Verfahren zeichnet sich schon *a priori* durch seine Allgemeinheit aus, insofern er für gerade wie ungerade Zellenzahl den nämlichen Gang einzuhalten bestrebt ist. Er zerlegt die vorhandenen m^2 Zellen in einzelne „Umläufe" (*ambitus*) von bezüglich

$$4(m-1),\ 4(m-3),\ 4(m-5)\ldots$$

Zellen und füllt durch einen fortlaufenden Zug je immer die Hälfte der einem Umlauf angehörigen Zellen aus, bis schliesslich die innerste Zelle, beziehungsweise das innere Quadrat zu vier Zellen erreicht ist. Alsdann werden die noch leeren Felder durch ein analoges Verfahren mit den Zahlen, die noch übrig bleiben, besetzt*). Beginnen wir mit den Quadraten ungerader Zellenzahl und knüpfen wir unsere Ueberlegungen

*) Der Vorgang ist ganz ähnlich dem, was Moschopulos „ἀναστρέφειν" nennt.

37) *Cantor*, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2. Jahrg. S. 365. 38) *Mollweide, Commentatio*, S. 17.

an das nach Stifel's Methode gebildete nebenstehende Quadrat von 169 Zellen an:

24	169	167	165	163	161	159	15	17	19	21	23	2
166	44	145	143	141	139	137	37	39	41	43	26	4
164	142	60	125	123	121	119	55	57	59	46	28	6
162	140	122	72	109	107	105	69	71	62	48	30	8
160	138	120	107	80	97	95	79	74	64	50	32	10
158	136	118	104	94	84	89	82	76	66	52	34	12
13	35	53	67	77	83	85	87	93	103	117	135	157
14	36	54	68	78	88	81	86	92	102	116	134	156
16	38	56	70	96	73	75	91	90	100	114	132	154
18	40	58	108	61	63	65	101	99	98	112	130	152
20	42	124	45	47	49	51	115	113	111	110	128	150
22	144	25	27	29	31	33	133	131	129	127	126	148
168	1	3	5	7	9	11	155	153	151	149	147	146.

Durch Betrachtung dieses Beispiels können wir uns leicht ein Bild von Stifel's Verfahren machen; in unserer Sprache wird sich dasselbe so formuliren lassen.

Ist irgend ein Umlauf von $4(m-(2k-1))$ *Zellen independent, d. h. ohne Zuhülfenahme der anderen Umläufe, zu bilden, so schreibe man in die unmittelbar auf die Eckzelle folgende Zelle der untersten Zeile die Zahl*

$$2(m-1)+2(m-3)+2(m-5)+\cdots+2(m-(2k-3))+1 = 2(k-1)(m+k-1)+1.$$

Das kleinere Quadrat, dessen erster Umlauf der gegebene sein würde, enthält

$$m^2-4(m-1)-\cdots-4(m-(2k-1))=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2$$

*Zellen, welche wir wieder in bekannter Weise durch Indices charakterisirt annehmen wollen. Dann können wir folgendes Schema bilden**)*:*

---

*) Wir hätten von Rechtswegen $m=2n+1$ setzen und die Fälle unterscheiden sollen, wo k gerade oder ungerade ist. Um diese Weitläufigkeit zu vermeiden, setzen wir fest, dass in dem Falle, wo der Ausdruck $\left[\frac{m-k\pm p}{2}\right]$ keine ganze Zahl ergiebt, stets der nächstgrössere ganzzahlige Werth genommen werden soll. Die Zahl k muss stets >1 sein.

Zelle $\alpha_{m-k,2}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+1$

$\vdots$ $\vdots$

Zelle $\alpha_{m-k,\left[\frac{m-k+1}{2}\right]}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+1$

$$+2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-1\right);$$

Zelle $\alpha_{1,\,m-k}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+2$

$\vdots$ $\vdots$

Zelle $\alpha_{\left[\frac{m-k-1}{2}\right],\,m-k}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+2$

$$+2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-1\right);$$

Zelle $\alpha_{\left[\frac{m-k+1}{2}\right],\,1}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+2$

$$+2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-1\right)+1;$$

Zelle $\alpha_{\left[\frac{m-k+3}{2}\right],\,1}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+2$

$$+2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-1\right)+2$$

$\vdots$ $\vdots$

Zelle $\alpha_{m-k-1,\,1}$ $: 2(k-1)(m+k-1)+2$

$$+2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-1\right)+2$$

$$+2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-3\right);$$

Zelle $\alpha_{1,\,1}$ $: 2(m-1+m-3+\cdots+m-(2k+1))=2(km-k^2);$

Zelle $\alpha_{1,\,m-k-1}$ $: 2k(m-k)-1$

$\vdots$ $\vdots$

Zelle $\alpha_{1,\left[\frac{m-k+1}{2}\right]}$ $: 2k(m-k)-1-2\left(1+2+3+\cdots\left[\frac{m-k-1}{2}\right]-3\right).$

Hiemit ist der halbe Umgang independent gebildet; die andere Hälfte wird von dem entgegengesetzten Ende her in ähnlicher Weise ausgefüllt.

Nunmehr, nachdem der Grundgedanke Stifel's, wie er ihn natürlich nur exemplifiziren konnte[39]), klar vorliegt, haben wir uns zwei weitere Fragen zu stellen:

I. *Wie war es möglich, dass Stifel auf diese anscheinend so höchst komplizirte Methode kam; ist es möglich den Gedankengang des Erfinders wenigstens theilweise zu rekonstruiren?*

II. *Wie lässt sich die Richtigkeit des Verfahrens beweisen?*

§. 13. Die Erledigung unserer ersten Frage wird uns erleichtert werden, wenn wir zunächst den zweiten Gegenstand in Angriff nehmen, und zwar wollen wir fürs Erste die beiden Diagonalreihen untersuchen. Zuerst erkennen wir leicht, dass das Mittelfeld des Quadrates von $(2n+1)^2$ Zellen durch die Zahl

$$2n^2 + 2n + 1$$

besetzt werden muss; ferner geht aus der Entstehungsart des Quadrates die Thatsache hervor:

Jede Diagonalreihe enthält $(2n+1)$ *Glieder, von welchen bezüglich die durch das Mittelfeld geschiedenen Theile von je n Gliedern in einer arithmetischen Progression der zweiten Ordnung stehen.*

Demnach besteht unter allen Umständen die von links unten nach rechts oben ansteigende Diagonale aus folgenden drei Theilen:

I.	II.	III.
2	$2n^2+2n+1$	$4n^2+4n$
$2+4n$		$4n^2+4n-4n$
$2+4n+4(n-1)$		$4n^2+4n-4n-4(n-1)$
$\vdots$		$\vdots$
$2+4n+4(n-1)+\cdots+4.2$		$4n^2+4n-4n-4(n-1)-\cdots-4.2.$

Diese Summen könnten wir nun nach bekannten Formeln geschlossen darstellen; indess ist deren Anwendung hier nicht einmal erforderlich. Denn da sich mit Ausnahme der Anfangsglieder jeder Bestandtheil von III gegen einen entsprechenden von I forthebt, so ist unmittelbar, wie verlangt wird,

$$\Sigma = I + II + III = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

39) *Stifel, Arithmetica integra,* Norimbergae MDXLIV. Bl. 25 ff.

Zerlegen wir analog die zweite Diagonalreihe, so sind ihre Abtheilungen:

I.	II.	III.
$4n$	$2n^2 + 2n + 1$	$4n^2 + 2$
$4n + 4\,(n - 1)$		$4n^2 + 2 - 4\,(n - 1)$
$4n + 4\,(n - 1) + 4\,(n - 2)$		$4n^2+2-4(n-1)-4(n-2)$
$\vdots$		$\vdots$
$4n+4(n-1)+4(n-2)+\cdots+4.2$		$4n^2+2-4(n-1)-\cdots-4.2,$

also wiederum

$$\Sigma = I + II + III = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Sehen wir nun zu, ob ein entsprechendes Gesetz auch in den anderen Reihen obwaltet. Bei den Kolonnen wie bei den Zeilen giebt es ein ähnliches Theilungsprinzip; nur werden wir dabei sechs einzelne Bestandtheile zu trennen haben. Beide Arten von Reihen werden gleichmässig behandelt, so dass wir unseren Nachweis auf eine der Arten, etwa auf die Kolonnen, zu beschränken berechtigt sind. Aber auch diese Kolonnen sind nicht gleichmässig gebildet, sondern lassen sich in vier Gruppen theilen, von denen je 2 nur ein einziges Glied, die beiden anderen aber bezüglich n und $(n - 1)$ Kolonnen in sich aufnehmen. Diese vier Gruppen unterscheiden sich am einfachsten durch ihr unterstes Glied, indem dasselbe eine der vier folgenden Werthe annehmen kann:

$$\begin{aligned}
4n^2 + 4n &: \text{Zelle } \alpha_{2n+1,\,1};\\
(p \geqq 1, \leqq n)\ 2p - 1 &: \text{Zelle } \alpha_{2n+1,\,2} - \text{Zelle } \alpha_{2n+1,\,n+1};\\
(q \geqq 0, \leqq n-2) 4n^2+2n-1-2q &: \text{Zelle } \alpha_{2n+1,\,n+2} - \text{Zelle } \alpha_{2n+1,\,2n};\\
4n^2 + 2 &: \text{Zelle } \alpha_{2n+1,\,2n+1}.
\end{aligned}$$

Da aber auch für jede dieser vier Kategorieen der Gang der Rechnung in allen wesentlichen Stücken sich gleich bleibt, so mag es sein Bewenden haben, wenn wir für eine der beiden allgemeineren, also etwa für die zweite, die Untersuchung vollkommen durchführen.

Dabei wollen wir die Einrichtung treffen, dass das untere in die Kolonne fallende Diagonalfeld mit II, das obere mit V bezeichnet wird; alsdann erkennt man unverzüglich die Be-

deutung der anderen römischen Ziffern. Wir werden dann weiter für jede Ziffer von I—VI die zu ihr gehörigen Zahlenwerthe anschreiben und finden auf diesem Wege, wenn wir die Zahl $(2p-1)$ als erste Zahl betrachten, folgendes Schema:

I.

$$2p-1$$
$$2p-1+2(2n-1)$$
$$2p-1+2(2n-1)+2(2n-3)$$
$$\vdots$$
$$2p-1+2(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+2(2n-(2p-3));$$

II.

$$4n^2+4n-4n-4(n-1)-4(n-2)-\cdots-4(n-p+2);$$

V.

$$4n+4(n-1)+4(n-2)+\cdots+4(n-p+2);$$

VI.

$$(2n+1)^2-2(p-1)$$
$$(2n+1)^2-2(p-1)-2(2n-1)$$
$$(2n+1)^2-2(p-1)-2(2n-1)-2(2n-3)$$
$$\vdots$$
$$(2n+1)^2-2(p-1)-2(2n-1)-2(2n-3)-\cdots$$
$$-2(2n-(2p-3));$$

III.

$$4n-2n+1+2(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+2(2n-(2p-1))$$
$$4n-2n+1+2(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+2(2n-(2p-1))+1$$
$$4n-2n+1+2(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+2(2n-(2p-1))+1+1.2$$
$$\vdots$$
$$4n-2n+1+2(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+2(2n-2(2p-1))$$
$$+1+2(n-p+2);$$

IV.

$$4n^2+2n+2-2(2n-1)-2(2n-3)-\cdots-2(2n-(2p-1))$$
$$4n^2+2n+2-2(2n-1)-2(2n-3)-\cdots-2(2n-(2p-1))+1.2$$
$$4n^2+2n+2-2(2n-1)-2(2n-3)-\cdots-2(2n-(2p-1))+2.2$$
$$\vdots$$
$$4n^2+2n+2-2(2n-1)-2(2n-3)-\cdots-2(2n-(2p-1))$$
$$+(n-p-2)2.$$

Diese sämmtlichen Ausdrücke sind nun zu summiren, und man findet

$$\Sigma = p\,(2p-1) + p\,(2n+1)^2 - 2p\,(p-1) + 4n^2 + 4n$$
$$+ (2n+1)\,(n-p) + (4n^2+2n+2)\,(n-p-1)$$
$$+ 2\,.\,2\,(1+2+3+\cdots+n-p-2) = 4n^3+6n^2+4n+1.$$

Hiemit können wir denn die Verifikation der Stifel'schen Methode als abgeschlossen beruhen lassen und zusehen, welchen Nutzen unsere bisherige Betrachtung für den zweiten Zweck gewährt, welchen wir noch im Auge hatten.

Aus unsrer Analyse des Bildungsgesetzes der einzelnen Reihen fliesst unmittelbar der wichtige Lehrsatz:

Jedes nach der Stifel'schen Vorschrift hergestellte magische Quadrat bleibt ein solches, wenn man auch beliebig viele Umläufe weglässt; es gehört somit zu der Classe derjenigen, welche Montucla[40]) *„mago-magiques" nennt und die wir künftig als „doppelt-magische" Quadrate bezeichnen wollen.*

Nun erhellt leicht, wie Stifel sein Verfahren sich ursprünglich zurechtgelegt haben mag. Er gieng aus von dem 9zelligen Quadrate

4	9	2
7	5	3
8	1	6

und erhöhte, um das 25zellige daraus abzuleiten, jede Zahl desselben um 8, um die vorausberechnete Mittelzahl 13 zu bekommen. Dann setzte er, vermuthlich zuerst empirisch, in die leeren Felder Zahlen, die ihm ein neues magisches Quadrat ergaben, und fuhr in dieser Weise fort, bis sich ihm das solchergestalt unschwer zu erkennende Bildungsgesetz offenbarte. Jedenfalls war, wie wir diess ja so oft in der Geschichte der Mathematik zu beobachten Gelegenheit haben, das Verfahren, welches uns Stifel vorführt, nicht das primäre; im Gegentheil:

Anstatt aus den einzelnen Umläufen das Quadrat sukzessive zusammenzusetzen, hat Stifel wahrscheinlich die Kernzelle zum Ausgangspunkt genommen und mit immer neuen Doppel-Gnomonen jedes gewonnene Quadrat umgeben.

---

40) *Montucla, Histoire des mathématiques,* Tome I., Paris 1758. S. 348.

Dass diese Lösung unseres „mathematisch-historischen" Problems — wie wir früher einmal [41]) solche Untersuchungen nannten — die richtige ist, wird uns noch klarer werden, wenn wir nun auch die ungeraden Quadrate Stifels auf ihre Entstehungsweise und Zusammensetzung prüfen.

§. 14. Um das Verfahren unseres Autors in seiner ganzen Durchsichtigkeit erkennbar zu machen, legen wir der weiteren Betrachtung Fig. 18. zu Grunde, wo wir jedoch nur die eine Zahlenhälfte eingetragen haben. Wir bemerken, dass das Kernquadrat von 16 Zellen und in Folge dessen auch jedes mit ihm konzentrische, selbst wieder magisch ist, und um jeden Zweifel zu beseitigen, hat Stifel [42]) selbst die Bildung dieses Kernquadrates für sich angegeben; es vollzieht sich dieselbe nach der ersten Regel des Moschopulos, indem aus

121	122	123	124
125	126	127	128
129	130	131	132
133	134	135	136

das neue Quadrat

136	123	122	133
129	126	127	132
125	130	131	128
124	135	134	121

durch Versetzung hergestellt wird.

Die Besetzungsregel der einzelnen Zellen ist hier noch übersichtlicher, als bei den Quadraten von ungerader Zellenzahl; nur ist sie nicht so einheitlich, denn es ist ein Unterschied zu machen, ob der Index des Umlaufs (den äussersten als ersten angesehen) eine gerade oder ungerade Zahl ist. Da wir jedoch im vorigen Paragraphen ein vollständig durchgeführtes Paradigma für alle hier in Betracht kommenden Fragen gegeben haben, so wird eine weitere Detaillirung nicht mehr von nöthen sein.

Nur auf Einen Punkt von allgemeinerer Tragweite wollen wir noch aufmerksam machen:

---

41) *Günther*, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Faulhaber, Sitzungsber. der Erl. phys.-med. Societät, 6. Heft, S. 112.
42) *Stifel*, Bl. 29.

Während die bisher bekannten Regeln zur Konstruktion ungerader magischer Quadrate sich entweder nur auf solche bezogen, deren Zellenzahl von der Form $(2.(2n+1))^2$ *oder von der Form* $(2.2n)^2$ *war, ist Stifel's Methode eine allgemein auf jede beliebige gerade Zahl anwendbare.*

Seinen universellen Geist bethätigte unser Verfasser auch in dem kleinen Anhang, welchen er dem von den Zauberquadraten handelnden Kapitel beigab:

Er dehnt darin die den magischen Quadraten zu Grunde liegende Idee auch auf geometrische Reihen aus.

Nähere Anweisungen giebt er nicht, sondern begnügt sich [43]) mit nachstehenden zwei Beispielen:

32768	4	2	4096		8	256	2
256	32	64	2048	und	4	16	64
16	512	1024	128		128	1	32.
8	16384	8192	1				

In der That ist die Sache einfach genug; denn besitzt man ein magisches Quadrat

$$\begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

der gewöhnlichen Art, so bestehen sofort für das daraus abgeleitete

$$\begin{matrix} A^{a_{1,1}} & \cdots & A^{a_{1,n}} \\ \vdots & & \vdots \\ A^{a_{n,1}} & \cdots & A^{a_{n,n}} \end{matrix}$$

die Relationen:

$$\prod_{i=1}^{i=n} A^{a_{i,i}} = \prod_{p=1}^{p=n} A^{a_{p,n+1-p}} = \prod_{q=1}^{q=n} A^{a_{q,r}} \; (r = 1, \cdots n)$$

$$= \prod_{t=1}^{t=n} A^{a_{s,t}} \; (s = 1, \cdots n),$$

welche nach Stifel's Forderung erfüllt sein müssen.

§. 15. Für ein Jahrhundert ziemlich ist Stifel's Leistung die letzte originelle und bedeutende auf unserem Gebiete, und in der That lag nun schon eine für jene Zeit völlig ge-

43) *Stifel*, Bl. 29 ff.

nügende Menge von Material vor, das verarbeitet sein wollte. Wir bemerken deshalb für die nächste Zeit zwar keine nennenswerthen Fortschritte, wohl aber das Bestreben, auf dem okkupirten Terrain heimisch zu werden und die einzelnen Methoden populär darzustellen.

Von einigen Männern, welche sich mit der Lehre von den magischen Quadraten vertraut zeigten, ihre Kenntnisse jedoch mehr zur Ausübung eines gewissen Virtuosenthums, als zur Beförderung der Wissenschaft angewandt zu haben scheinen, berichten uns zeitgenössische und spätere Schriftsteller. Daniel Schwenter[44]), der selbst eine Anweisung zur Konstruktion solcher Quadrate giebt, deren Zahlen in geometrischer Progression stehen und multiplizirt werden, nennt uns als solche Praktiker Franziscus Spinola, Georg Henisch, Peter Roth, Zacharias Lochner, Faulhaber und Remmelin. Bezüglich der beiden Erstgenannten sind wir nicht in der Lage irgendwelche Dokumente vorlegen zu können.

Peter Roth (gest. 1617) war einer der hie und da bekanntlich sehr unterrichteten Rechenmeister[45]), der in arithmetischen Kunststücken mancherlei geleistet haben mag. In die gleiche Kategorie ist auch Lochner (gest. 1608) zu setzen; Doppelmayr[46]) rühmt seine arithmetischen Kenntnisse, und führt als Beleg an, dass er „auch sonsten eine so grose Geschicklichkeit hatte, dass er gar leicht und behend allerhand magische Quadrate, ja gar die gröste, zu deren jeden öfters ein gantzer Regal-Bogen erfordert wurde, beschreiben und darstellen kundte". Bedenken wir, wie bequem für ungerade Quadrate die erste Regel des Moschopulos, für gerade die Methode Stifel's gehandhabt werden können, so verliert eine solche Kunstfertigkeit zwar alles Ueberraschende, beweist aber doch, dass man die vorhandenen Verfahrungsweisen kannte und anzuwenden verstand.

Was Johann Faulhaber anbetrifft, so müsste allerdings der kabbalistische Hauch, der noch immer den magischen Quadraten anhieng, den Velleitäten dieses genialen Mannes

---

44) *Schwenter*, *Deliciae physico-mathematicae*, Nürnberg 1626. S. 100.
45) *Doppelmayr*, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730. S. 165. 46) *Ibid.* S. 164.

an sich sehr zugesagt haben, und Ofterdinger[47]) sagt auch, dass er in seinen zahlreichen Schriften „die ganze Algebra, bis zur cardanischen Regel, mit besonderer Vorliebe aber die Lehre von den Progressionen, die von den magischen Quadraten und von der Natur der Zahlen" behandelt habe. Merkwürdigerweise erwähnt aber Kästner[48]) in der genauen Analyse, welche er von Faulhaber's Arbeiten giebt, nichts, was hierauf Bezug hätte, und so müssen wir denn auch auf Beibringung genauerer Nachrichten verzichten. Etwas besser sind wir daran mit seinem Schüler und Freunde Remmelin, denn wenn wir auch seine Schrift, die nach Ofterdinger's Zeugniss[49]) selbst heutzutage noch von Werth sein soll, nicht selbst zur Vergleichung heranziehen konnten*), so hat uns doch Kästner ihren Inhalt aufbehalten. Derselbe führt zunächst den Titel der Abhandlung[50]) *in extenso* an und sagt dann[51]) weiter: „Hierinn: eine viereckte Tafel, alle ungeraden Zahlen von 1 bis auf 1151 begreifend, also gesetzt, dass in Addition sowohl nach der Länge als Breite, auch Diagonien eine gleiche Zahl entspringt nähmlich 13824. Also ein sehr grosses magisches Quadrat, hat 24 Columnen und eben so viel Reihen, beyde oben, unten und an den Seiten mit den grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet". Aus der weiteren Beschreibung Kästner's scheint jedoch hervorzugehen, dass das magische Quadrat hier nur eine ganz sekundäre Rolle in einer — damals so sehr beliebten — Untersuchung über Polygonalzahlen spielte.

§. 16. Kann man — soweit wenigstens annoch unsere Kenntniss reicht — in den Leistungen der soeben charakterisirten Männer einen wirklichen Fortschritt nicht erkennen, so ist diess im Gegentheil der Fall mit der Thätigkeit, welche ein freilich

*) Herr Professor Ofterdinger war so freundlich, uns mitzutheilen, dass die betreffende Abhandlung zur Zeit selbst auf den Ulmer Bibliotheken nicht mehr zu erhalten sei, dass er sie aber noch zu bekommen hoffe und uns dann mittheilen werde. In diesem Falle würden wir eine Analyse derselben in einer Zeitschrift veröffentlichen.

47) *Ofterdinger*, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts, Ulm 1867. S. 10. 48) *Kästner*, Geschichte der Mathematik, 3. Band, Göttingen 1799. S. 111 ff. 49) *Ofterdinger*, S. 5. 50) *Remmelin*, *Adyta numeri reclusa* d. i. Eröffnung grosser Geheimnisse, Kempten 1629. 51) *Kästner*, S. 128.

auch ungleich bedeutenderer Mathematiker unseres Nachbarlandes der Lehre von den magischen Quadraten zuwandte. Wir meinen den grossen Reformator der unbestimmten Analytik, Gaspard Bachet de Méziriac, und werden nun zeigen, dass, wenn auch die Theorie selbst unter seinen Händen nicht wesentlich vorwärts kam, doch in der gerade hier so überaus wesentlichen Konstruktions-Praxis durch ihn eine neue Epoche begründet wurde.

Bachet ist es nämlich, der die erste Regel des Moschopulos zur Konstruktion magischer Quadrate von ungerader Zellenzahl in einer für die praktische Anwendung förderlichen Weise umgestaltet und jene Methode geschaffen hat, welche wir früher (§. 6.) *kurz als die Terrassenmethode bezeichneten*).*

Den möglichst präzisen Ausdruck der Bachet'schen Regel, sowie ihren allgemeinen Beweis haben wir bereits in unserer mehrfach genannten Abhandlung geliefert und benügen uns deshalb an dieser Stelle mit der nach dieser Vorschrift hergestellten Verfertigung eines (in Fig. 19. dargestellten) Quadrates von 121 Zellen. Bachet selbst[52]) geht nur bis zu 25 Zellen; auf eine Deduktion, die dem Zweck seines Werkchens entgegen gewesen wäre, lässt er sich nicht ein und bemerkt nur noch[53]), dass man, ohne die Richtigkeit zu beanspruchen, jeden Term um ein und dieselbe Zahl erhöhen könne.

Anmerkung. Nimmt man in unserer Figur die von Bachet geforderte Verschiebung vor, so rücken die Zahlen der Terrassen in die einstweilen noch durch Buchstaben ausgefüllten Zellen des Quadrates selbst ein und zwar wird

$a=77$, $b=87$, $c=97$, $d=107$, $e=117$, $f=67$, $g=88$, $h=98$, $i=108$, $k=118$, $l=7$, $m=78$, $n=99$, $o=109$, $p=119$, $q=8$, $r=79$, $s=89$, $t=110$, $u=120$, $v=9$, $w=19$, $x=90$, $y=100$, $z=121$, $\alpha=10$, $\beta=20$, $\gamma=91$, $\delta=101$, $\varepsilon=111$, $\zeta=11$, $\eta=21$, $\vartheta=31$, $\iota=102$, $\varkappa=112$, $\lambda=1$, $\mu=22$, $\nu=32$, $\xi=103$, $o=113$, $\pi=2$, $\varrho=12$, $\sigma=33$, $\tau=43$, $\upsilon=114$, $\varphi=3$, $\chi=13$, $\psi=23$, $\omega=44$, $\mathfrak{a}=115$, $\mathfrak{b}=4$, $\mathfrak{c}=14$, $\mathfrak{d}=24$, $\mathfrak{e}=34$, $\mathfrak{f}=55$, $\mathfrak{g}=5$, $\mathfrak{h}=15$, $\mathfrak{i}=25$, $\mathfrak{k}=35$, $\mathfrak{l}=45$.

*) Hiernach ist eine von uns früher (in dem dort zitirten Aufsatze) gemachte Bemerkung zu rektifiziren. Wir glaubten nämlich die Anfänge jener Methode zum erstenmal in einem 1765 erschienenen holländischen Werke (s. §. 21.) nachweisen zu können.

52) *Bachet, Sieur de Meziriac, Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres*, A Lyon MDCXXIV. S. 160 ff. 53) *Ibid.* S. 165.

Auch mit den magischen Quadraten von gerader Zellenzahl beschäftigte sich Bachet[54]); indess giebt er nur die erste Regel von Moschopulos für gerad-gerade und die bereits von Riese und anderen Rechnern angewandte Verstellungsregel für ungerad-gerade Zellenzahl.

An Bachet scheint sich auch Arnaud in seiner Geometrie[55]) angelehnt zu haben; sicherlich ist er nicht weit über sein Vorbild hinausgegangen. Wegen Mangels der Quelle können wir jedoch den eigentlichen Werth seiner Bemühungen nicht übersehen.

§. 17. Der erste Mathematiker, welcher Bachet's Verfahren kennt und durchgängig anwendet, ist Athanasius Kircher, der in seinem arithmetischen Hauptwerke[56]) den magischen Quadraten einen Ehrenplatz einräumt. Freilich ist nicht Alles, was er über sie mittheilt, für die Sache selbst von Bedeutung, vielmehr mischen sich, wie das bei Kircher, dem Repräsentanten aller Gelehrsamkeit, aber auch allen gelehrten Unsinns seiner Epoche, nicht auffallen kann, fremdartige Dinge in Menge mit ein. Von den mysteriösen Spielereien, denen er und verschiedene seiner Zeit- und Gesinnungsgenossen noch grosses Gewicht beilegten, werden wir in einer Note sprechen; für jetzt interessirt uns blos das dritte Kapitel[57]), betitelt *„De Mathematico fabricae et constructionis dictorum Sigillorum ratiocinio"*.

Dieses Kapitel lehrt die Verfertigung aller magischen Quadrate von 9 bis 81 Zellen. Für die ungeraden wird die Regel Bachet's, ohne Beweis, dafür aber mit grossem Wortschwall, angegeben, seine Behandlung der geraden dagegen ist nicht ohne Originalität.

Kircher sucht die von Bachet für ungerade Zellenzahl vortheilhaft angewandte Terrassenmethode auch auf eine gerade Zellenzahl auszudehnen.

Um das Verdienstliche seines Verfahrens einzusehen, greifen wir auf die Regel zur Konstruktion gerader Quadrate zurück, welche wir zuerst bei Adam Riese antrafen: Dieselbe wird von Kircher ganz ähnlich praktisch vervollkommnet, wie dies von Bachet für die Methode des Moschopulos geschehen war. Riese's Verfahren war, allgemein ausgedrückt,

54) *Ibid.* S. 166 ff. 55) *Arnaud, Nouveaux éléments de géométrie,* Paris MDCCLXVII; Hagae Comitum MDCCXC. 56) *Kircher, Arithmologia sive de abditis Numerorum mysteriis,* Romae MDCLXV. 57) *Ibid.* S. 73 ff.

dieses: Er schrieb die $(2n)^2$ Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in $2n$ Reihen von je $2n$ Gliedern an und strich dann aus jeder Reihe je n Zahlen weg. Alsdann kam das „ἀναστρέφειν" des Moschopulos zur Geltung, d. h. die ganze Zahlenreihe wurde jetzt im entgegengesetzten Sinne angeschrieben, so dass an die Stelle von $4n^2$ nunmehr die Zahl 1 traf. Auf diese Weise wurde jede noch leere Zelle mit der ihr zugehörigen Zahl besetzt, und es kam ersichtlich nur darauf an, das Gesetz zu kennen, nach welchem die Abstreichung vorzunehmen war. Ist das Quadrat ein gerad-gerades, so darf man sich nur an die Vorschrift des Moschopulos halten, anderenfalls ist es nicht ganz so einfach zu erkennen und scheint auch in jener frühen Zeit nicht allgemein erkannt gewesen zu sein.

Kircher's Verfahren ist nun bei gerad-geraden Quadraten eine einfache Umbildung des byzantinischen, wie man aus Fig. 20. ersehen kann. Bei ungerad-geraden Quadraten hat man den Vortheil, sofort die Zahlen mit einem Schlage zu übersehen, welche in den ersten Umlauf gehören. Wie aber aus den Terrassen in die Zellen nieder-, beziehungsweise aufwärtsgestiegen werden soll, diess hütet sich Kircher wohlweislich anders als am speziellen Beispiel darzustellen, und es scheint dasselbe, soweit wir uns selbst überzeugten, mindestens kein leicht auffindbares zu sein. Für die Zahl 6 freilich gestaltet sich die Sache sehr einfach, wie wir durch die aus Kircher's Werk[58]) entnommene Fig. 21. darthun. Immerhin bleibt seiner Idee, wenn auch in der Ausübung mit viel beträchtlicheren Schwierigkeiten verknüpft, als er wohl glaubte, ein gewisses Verdienst, und zur leichteren Orientirung kann man sich immer auf sie beziehen.

Den Mangel der Allgemeinheit scheint er selbst gefühlt zu haben, denn in den folgenden Abschnitten führt er[59]) die Konstruktion ganz in der Weise Stifel's durch, ohne freilich*) seine Quelle zu nennen. Zum Schluss werden dann noch diejenigen magischen Quadrate von n^2 Zellen betrachtet[60]), in

*) Diese ganz unqualifizirbare Handlungsweise Kircher's hat wohl in der Stellung seinen Grund, die er als Jesuit dem protestantischen Geistlichen gegenüber einnahm. Seine Ordensbrüder pflegt er wenigstens gewissenhaft zu zitiren.

58) *Ibid.* S. 93 u. 95. 59) *Ibid.* S. 110 ff. 60) *Ibid.* S. 138 ff.

welchen nicht n^2, sondern blos n Zahlen vorkommen, wie z. B. in dem nachstehenden:

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Ein solches magisches Quadrat ist indess häufig ein unvollkommenes, weil die eine Diagonale aus dem Spiele gelassen werden muss. Um die nämliche Zeit wie Kircher gab ein anderer Jesuit, der als Vielschreiber ihm ähnliche Caspar Schott, eine Anweisung zur Verfertigung der Zauberquadrate, welche theoretisch nichts Neues bietet; von Interesse für die mathematische Terminologie jener Zeit ist dagegen die Art und Weise, wie er[61]) sein Problem formulirt. Man soll nach ihm *„Numeros quoscunque quadratos ita in quadrata disponere, ut quaevis series additae, sive transversus sumantur, sive à summo deorsum, sive decussatim, seu diagonaliter, semper eandem summam conficiant“.*

Wir treten nunmehr in eine neue Epoche ein, in diejenige nämlich, während welcher die Lehre von den magischen Quadraten sich fast ausschliesslich in den Händen französischer Mathematiker befindet und durch deren Bemühungen ein wissenschaftliches Gepräge erhält, das ihr bisher noch fehlte. Der sachliche Zusammenhang fordert es, dass wir innerhalb dieses Zeitraumes von etwa 70 Jahren uns ganz nach Frankreich wenden und erst nachträglich auch die ziemlich spärlichen Leistungen anderer Länder während jener Zeit registriren.

§. 18. Es ist im Folgenden unsere Aufgabe, ein gedrängtes Bild zu entwerfen von der regen Thätigkeit, welche sechs französische Geometer, Frénicle, De la Hire, Poignard, Sauveur, Ons-en-Bray und Rallier des Ourmes, auf unserem Gebiete entfaltet haben.

Beginnen wir in chronologischer Ordnung mit dem Erstgenannten, mit dem als Zahlentheoretiker von seinen Zeitgenossen hochgeschätzten Frénicle de Bessy.

---

61) *Schott, Technica cursiva seu mirabilia artis*, Norimbergae MDCLXIV, S. 872.

Derselbe beginnt seine Untersuchung[62]) mit einer sehr ausführlichen Diskussion der Quadrate von ungerader Zellenzahl und beweist nicht sowohl algebraisch, als vielmehr induktorisch mit Hülfe einer Unzahl von Beispielen einen Satz, den wir so aussprechen können:

Hat man zu einem Quadrate von ungerader Zellenzahl die Bachet'schen Terrassen gebildet, so schreibe man die 1 *in eine willkürliche Diagonalenzelle und in diese Diagonale alle Zahlen bis zu* $(2n+1)$ *in ganz regelloser Folge. Ebenso schreibe man* (p *ganzzahlig* $\geqq 1 \leqq 2n$) *die Zahl* $(1+p(2n+1))$ *in die der durch* 1 *besetzten Zelle entsprechende einer ganz willkürlichen Diagonalreihe und fahre so, ohne im geringsten in der Wahl der Diagonalreihen eine Folge zu beobachten, fort, bis alle Werthe von* p *erschöpft sind. Die einzelnen Diagonalreihen werden dann in der Weise besetzt, dass der Zahl* q *in der zuerst ausgeführten Reihe die Zahl* $(1+p(2n+1)+q-1)$ *gleich*

$$2np+p+q$$

entspricht. Sind schliesslich sämmtliche Diagonalreihen besetzt, so erfolgt die Zusammenschiebung der Terrassen gerade so, wie bei Bachet's ursprünglicher Methode.

Nach dieser Regel ist das Fig. 22. abgebildete magische Quadrat hergestellt worden.

Der Beweis der Richtigkeit dieser Erweiterung wird ebenso geführt, wie bei dem von Bachet selbst behandelten speziellen Falle, und wir brauchen deshalb nur auf unsere schon mehrfach zitirte Abhandlung zu verweisen. Wir können jedoch die Sache noch von einem universelleren Standpunkte aus betrachten:

Aus der früher (§. 6.) *bereits hervorgehobenen Thatsache, dass die Methode des Moschopulos, mit welcher die von Frénicle prinzipiell übereinstimmt, nicht sowohl auf die Konstruktion eines magischen Quadrates im engeren Sinne, als vielmehr auf die einer magischen Kugel abzielt, geht sofort hervor, dass weder irgend eine Diagonalreihe, noch auch eine bestimmte Zelle eine bevorrechtete Stellung verdient, dass vielmehr sowohl in der Wahl der Anfangszelle als in der der Diagonalen absolute Willkürlichkeit von selbst geboten erscheint.*

---

62) *Divers ouvrages de Mathématique et de Physique. Par Messieurs de l'Académie Royale de Sciences*, A Paris MDCXCIII. S. 423 ff.

Nachdem Frénicle solchergestalt die ungeraden Quadrate absolvirt hat, geht er dazu über[63]), eine ebenso allgemeine Methode zur Konstruktion der geraden zu entwerfen. Er gedenkt diese Aufgabe durch sukzessive Bildung von doppeltmagischen Quadraten (s. §. 13.) zu lösen. Hierzu wird zunächst die Kenntniss des Quadrates von 16 Zellen erfordert, dessen Bildung er denn auch sehr ausführlich bespricht.

Alsdann erläutert er wiederum, seiner Gewohnheit gemäss, den allgemeinen Vorgang an einer Menge von Beispielen und giebt endlich — wenn auch mit Ausschluss der algebraischen Zeichensprache — seine allgemeine Methode an.

Diese Methode stimmt in ihrer Grundidee, durch einzelne Umläufe das Quadrat sukzessive zu bilden, mit derjenigen Stifel's überein, weicht jedoch im Detail von derselben ab, denn während letzterer mit der Bildung von aussen nach innen fortschreitet, nimmt Frénicle beim 16zelligen Kernquadrat seinen Ausgangspunkt.

Das Quadrat von 196 Zellen (Fig. 23.) ist nach dieser Regel Frénicle's gebildet. Man erkennt zunächst, dass das Kernquadrat, allgemein ausgedrückt, von der Form

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4n^2-1 & 4n^2-2 & 4 \\ 4n^2-4 & 6 & 7 & 4n^2-7 \\ 8 & 4n^2-6 & 4n^2-5 & 5 \\ 4n^2-3 & 3 & 2 & 4n^2 \end{array}$$

sein wird, und diess ist in der That ein magisches Quadrat, indem die Summe aller Reihen die Zahl $(8n^2+2)$ ergiebt. Es handelt sich nunmehr darum zu erkennen, wie dieses Quadrat — um einen in der Determinantenlehre üblichen Ausdruck zu gebrauchen — „gerändert" werden müsse.

In die Ecken treten (zyklisch von links nach rechts gezählt) die vier Zahlen: 9, 10, $4n^2-8$, $4n^2-9$, so dass die Diagonalen des neuen Quadrates die Summen

$$9+1+6+4n^2-5+4n^2+4n^2-8=10+4+7+4n^2-6$$
$$+4n^2-3+4n^2-9=12n^2+3$$

liefern. Nun bemerke man, dass je zwei einander in einem Umfang diametral gegenüberstehende Zahlen in Summe die Zahl $(4n^2+1)$ besitzen; sind also, diesen Umfang vorläufig

63) *Ibid.* S. 442.

mit Ausnahme der Eckzellen noch unausgefüllt gedacht, z. B. x_1, x_2, x_3, x_4 die vier Zellen der obersten Zeile, y_1, y_2, y_3, y_4 diejenigen der ersten Kolonne, so hat man blos die beiden diophantischen Gleichungen

$$9 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 10 = 12n^2 + 3,$$
$$9 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 4n^2 - 9 = 12n^2 + 3$$

ganzzahlig aufzulösen und in jedes dem x_p oder y_p gegenüberliegende Feld bezüglich die Zahl

$$(4n^2 + 1 - x_p) \text{ oder } (4n^2 + 1 - y_p)$$

einzutragen, denn dann hat man für die unterste Zeile und für die letzte Kolonne resp.

$$10 + 4(4n^2 + 1) - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 4n^2 - 8 = 12n^2 + 3,$$
$$4n^2 + 9 + 4(4n^2 + 1) - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4n^2 - 8 = 12n^2 + 3,$$

wie die Aufgabe verlangt. Für jede andere Zeile oder Kolonne aber ist entweder

$$x_p + 4n^2 + 1 - x_p + 8n^2 + 2 = 12n^2 + 3,$$

oder

$$y_p + 4n^2 + 1 - y_p + 8n^2 + 2 = 12n^2 + 3.$$

Hiermit wäre also für das 36 zellige Quadrat die Sache erledigt. Nur ist noch die Bemerkung zu machen, dass die ganzzahligen Werthe, welche den obigen unbestimmten Gleichungen genügen, innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen sein müssen. Ohne uns aber hierbei aufzuhalten, stellen wir sofort die Methode des Frénicle in allgemeinster Weise folgendermassen fest.

Gesetzt, man habe mit Zugrundelegung des oben angegebenen Kernquadrates einstweilen ein magisches Quadrat von $4s^2$ Zellen ($s < n$) hergestellt, und es soll dasselbe nunmehr gerändert werden. In dem Quadrat, das vorliegt, kommen alle Zahlen zwischen 1 *und M (das nachher bestimmt werden soll), sowie zwischen* $(4n^2 - M + 1)$ *und* $4n^2$ *vor. Dann schreibe man in die 4 Eckzellen des neu zu bildenden Quadrates bezüglich die Zahlen* $(M+1)$, $(M+2)$, $(4n^2 - M)$ $(4n^2 - M - 1)$ *ein und bezeichne, wie oben, die Zellen der ersten*

Zeile und Kolonne durch x und y. Diese Grössen müssen ganzzahlig sein und den beiden Gleichungen)*

$$2M + 3 + \sum_{p=1}^{p=2(s-1)} x_p = \overset{2}{\Sigma}\, Ar.\ Pr.\ Asc.\ 4, 4 + \overset{2}{\Sigma}\, \overset{(s-1)}{Ar.\ Pr.\ Desc.}\ 4n^2 - 3, 4 + 4n^2 + 1,$$

$$4n + \sum_{p=1}^{p=2(s-1)} y_p = \overset{2}{\Sigma}\, \overset{(s-1)}{Ar.\ Pr.\ Asc.}\ 4, 4 + \overset{2}{\Sigma}\, \overset{(s-1)}{Ar.\ Pr.\ Desc.}\ 4n^2 - 3, 4 + 4n^2 + 1$$

genügen, dürfen dabei aber nur zwischen den Grenzen

$$M + 2(2s - 1) \text{ und } 4n^2 - M + 1 - 2(2s - 1)$$

enthalten sein. In dieser Weise ist denn der Umlauf von

$$4(2s - 1)$$

Zellen independent gebildet, sobald die beiden Zahlen n und s gegeben sind.

Die hier noch unbestimmt gelassene Zahl M bestimmt sich leicht folgendermassen. Behalten wir die frühere Schreibweise bei, so ist

$$M = [\overset{2}{\Sigma}\, \overset{(s-2)}{Ar.\ Pr.\ Asc.}\ 19, 4] - 1.$$

Man erkennt, wie man durch diese Methode alle geraden magischen Quadrate sehr leicht bilden kann; dieselbe ist allerdings insofern allgemeiner als die, welche Frénicle vermuthlich selbst befolgte, als sie nicht blos ein bestimmtes, sondern alle denkbaren Quadrate liefert. Ist auch die Auflösung der verschiedenen unbestimmten Gleichungen nicht wohl ohne Probiren zu leisten, so ist doch andererseits diess Tatonnement ein streng geregeltes.

Einen glänzenden Beweis seiner Arbeitskraft wie seines rechnerischen Talentes gab Frénicle noch dadurch, dass er in einer Riesentabelle[64]) sämmtliche magische Quadrate zusammenstellte, welche sich bei 16 Zellen bilden lassen. Seine

*) Die hier benützte abgekürzte Bezeichnungsweise ist leicht verständlich; das erste Symbol bedeutet eine aufsteigende arithmetische Reihe zweiter Ordnung von $(s - 1)$ Gliedern, mit Anfangsglied 4 und Differenz 4, das zweite eine ebensolche absteigende mit Anfangsglied $(4n^2 - 3)$ und Differenz 4.

64) *Ibid.* S. 484 ff.

Absicht war dabei, die laut gewordene Behauptung, es sei die Anzahl der möglichen Variationen keine sehr bedeutende, durch die That zu widerlegen, und wirklich fand er deren 880.

Frénicle ist unter den bedeutenderen Autoren der letzte, welcher sich mit blosser Angabe und raissonnirender Behandlung der einzelnen Regeln begnügte*), von nun ab wird uns die Arbeit insofern sehr erleichtert werden, als wir meistentheils auch gleich die Beweise vorfinden und dieselben nicht mehr selbst beizufügen genöthigt sind.

§. 19. Von den so überaus zahlreichen Abhandlungen De la Hire's über alle Zweige des grossen Disziplinen-Komplexes, welchen man damals mit dem Namen Mathematik bezeichnete, beschäftigen sich auch zwei mit den magischen Quadraten. Die erste derselben[66]) ist von besonderem Werthe, weil sie eine kurze auch von uns bereits benützte geschichtliche Uebersicht, sowie auch ein Referat über das Werk von Poignard[69]) enthält. Dieses Referat scheint hinlänglich genau zu sein, und so beziehen wir uns denn ausschliesslich auf dasselbe; das Buch selbst konnten wir uns nicht verschaffen, und in einer anderen uns zugänglichen Schrift[68]) desselben Verfassers fanden wir, wider unsere Erwartung, gar keine Stelle, die den magischen Quadraten gewidmet wäre.

De la Hire zeigt nun, dass Poignard im Wesentlichen zwei neue Methoden in Vorschlag gebracht habe, davon sei jedoch die erste nicht wirklich neu gewesen, sondern komme mit der der Inder (s. §. 1.) überein, die zweite dagegen, eine Erweiterung der ersten, sei in der Allgemeinheit, wie sie ihr Urheber ausgesprochen, unrichtig und gelte, streng genommen, nur für Primzahlen-Quadrate[69]).

*) Hierbei muss jedoch zur Steuer der Wahrheit bemerkt werden, dass Frénicle seine Arbeiten nicht für den Druck bestimmt hatte, sondern dass wir hier eigentlich seine Konzepte vor uns haben. De la Hire bekam die Papiere zur Durchsicht, und da sie ihm, selbst in dieser Form, mit Recht des Interessanten genug zu enthalten schienen, so nahm er, wie die Vorrede zu dem Sammelband ausdrücklich hervorhebt[65]), keinen Anstand, sie darin zu publiziren.

65) *Ibid. Préface.* 66) *De la Hire, Nouvelles constructions et considérations sur les quarrés magiques avec les demonstrations,* Mém. de l'acad. royale des sciences, Année MDCCV. S. 127 ff. 67) *Poignard, Traité des quarrés magiques,* Bruxelles 1704. 68) *Id. L'arithmétique, enseignée par principes,* ibid. 1733. 69) *De la Hire,* S. 169.

Poignard war hierbei offenbar durch Frénicle inspirirt; ebenso wie dieser (s. den vorigen Paragraphen) die Bachet'sche Terrassenmethode als einer grossen Erweiterung fähig nachgewiesen hatte, glaubte er, nachdem er, vermuthlich spontan, die indische Methode erworben hatte, auch hier eine ähnliche Variation anbringen zu dürfen.

Hat man ein magisches Quadrat von ungerader Zellenzahl $(2n+1)^2$ *gebildet, so könnte man, nach Poignard's Meinung, aus demselben ein neues dadurch herleiten, dass man in je zwei Transversalreihen, deren Zellenzahl zusammen* $(2n+1)$ *beträgt, die Zahlen willkürlich vertauschte und die übrigen Transversalreihen entsprechend behandelte.*

Dass diess jedoch nicht der Fall ist, hat De la Hire durch ein Beispiel dargethan. Das zur Seite abgebildete 81zellige Quadrat ist nach dieser Poignard'schen Methode konstruirt, und in der That liefern sowohl die Zeilen und Kolonnen wie auch die zweite*) Diagonale die Summe 369; die in der ersten Diagonalreihe stehenden Zahlen dagegen betragen zusammen 372.

51	55	68	80	3	13	20	36	43
58	65	81	7	15	19	32	44	48
64	77	8	12	22	29	45	52	60
74	9	16	24	28	41	53	57	67
5	17	21	31	38	54	61	69	73
18	25	33	37	50	62	66	76	2
26	30	40	47	63	70	78	1	14
34	42	46	59	71	75	4	11	27
39	49	56	72	79	6	10	23	35

Ist freilich $(2n+1)$ eine Primzahl, so ergiebt das Verfahren ein durchaus richtiges Resultat.

Was nun De la Hire's selbstständige Leistungen betrifft, so ist dabei zu bemerken, dass er das Wort „Magisches Quadrat" in einer anderen Bedeutung nimmt. Er ist nämlich von folgender Definition ausgegangen:

Sind in die Zellen eines Quadrates von m^2 *Zellen m willkürlich gewählte Zahlen so vertheilt worden, dass alle Zeilen, Kolonnen und Diagonalen je eine dieser m Zahlen enthalten, so hat man ein magisches Quadrat.*

Die von unserem Autor betrachteten Quadrate sind ausschliesslich ungerade und für sie giebt er eine elegante un-

*) Wir bedienen uns hier wieder, der Kürze halber, der bequemen Terminologie des Determinantenkalküls [70]).

70) *Günther*, Determinantentheorie, S. 33.

mittelbar verständliche Regel, die etwa so auszusprechen sein dürfte:

Man fasse das Quadrat wiederum als eine in m^2 Zellen eingetheilte Kugel auf, schreibe in die Zellen einer beliebigen Zone die m Zahlen beliebig ein und betrachte jede so ausgefüllte Zelle als Ausgangspunkt einer in dem nämlichen Sinne fortgesetzten Springerbewegung; alle von derselben getroffenen Zellen erhalten die nämliche Zahl.

28	7	0	42	35	21	14
42	35	21	14	28	7	0
14	28	7	0	42	35	21
0	42	35	21	14	28	7
21	14	28	7	0	42	35
7	0	42	35	21	14	28
35	21	14	28	7	0	42

Nach dieser Regel hat De la Hire[71]) das Quadrat von 49 Zellen gefertigt, das wir hier vor uns sehen. Es erhellt, dass hierbei nothwendig m eine ungerade Zahl sein muss, denn anderenfalls würde der nämliche Term in gewissen Reihen zweimal, in anderen dagegen gar nicht vorkommen können.

Die Konstruktion solcher magischen Quadrate ist übrigens lediglich eine Vorbereitung für die Lösung der Aufgabe im sonst üblichen Sinne. De la Hire verwendet nämlich diese Präliminarien in folgender äusserst geschickter Weise[72]):

Soll ein Quadrat von $(2n+1)^2$ Zellen hergestellt werden, so bilde man zwei Hülfsquadrate dieser Zellenzahl („premier" und „second quarré"). Das erste fülle man durch die Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots 2n+1$$

in der soeben beschriebenen Weise aus, das zweite ebenso durch die Zahlen

$$0, 1(2n+1) \quad 2(2n+1) \ldots 2n(2n+1);$$

nur muss bei diesem zweiten die kontinuirliche Springerbewegung im entgegengesetzten Sinne erfolgen. Hierauf addirt man die in homologen Zellen der zwei Quadrate befindlichen Zahlen und erhält so ein drittes magisches Quadrat, in dem alle Zahlen zwischen 1 und $(2n+1)^2$ vertreten sind, das sogenannte „quarré parfait".

Als Beispiel mag nachstehende Zusammenstellung gelten:

71) *De la Hire*, S. 138. 72) *Ibid.* S. 137 ff.

Premier Quarré.					*Second Quarré.*					*Quarré parfait.*				
3	1	5	4	2	10	5	0	20	15	13	6	5	24	17
5	4	2	3	1	20	15	10	5	0	25	19	12	8	1
2	3	1	5	4	5	0	20	15	10	7	3	21	20	14
1	5	4	2	3	15	10	5	0	20	16	15	9	2	23
4	2	3	1	5	0	20	15	10	5	4	22	18	11	10.

De la Hire beweist seine Regel und lehrt sie in mannigfachster Weise modifiziren, unter anderem auch so, dass nicht bloss magische, sondern sogar doppelt-magische Quadrate entstehen, jedoch bleibt der Grundgedanke im Wesentlichen derselbe.

In ganz analoger Weise wird in der zweiten Abhandlung, deren wir vorhin Erwähnung thaten, das Quadrat von $16n^2$ Zellen gebildet; die Grundregel wird stets beibehalten, aber aufs Eleganteste nach allen Seiten variirt. Mit Bezugnahme auf das oben Gesagte wird man aus dem folgenden Exempel, welches — jedoch mit Ausführung des dort blos angedeuteten Schemas — mit einem der zahlreich im Originale vorkommenden übereinstimmt[73]), den Geist des Verfahrens entnehmen können:

Primitif I.								*Primitif II.*								*Parfait.*							
3	5	1	2	7	8	4	6	24	32	24	32	32	24	32	24	27	37	25	34	39	32	36	30
6	4	8	7	2	1	5	3	0	56	0	56	56	0	56	0	6	60	8	63	58	1	61	3
3	5	1	2	7	8	4	6	16	40	16	40	40	16	40	16	19	45	17	42	47	24	44	22
6	4	8	7	2	1	5	3	48	8	48	8	8	48	8	48	54	12	56	15	10	49	13	51
6	4	8	7	2	1	5	3	8	48	8	48	48	8	48	8	14	52	16	55	50	9	53	11
3	5	1	2	7	8	4	6	40	16	40	16	16	40	16	40	43	21	41	18	23	48	20	46
6	4	8	7	2	1	5	3	56	0	56	0	0	56	0	56	62	4	64	7	2	57	5	59
3	5	1	2	7	8	4	6	32	24	32	24	24	32	24	32	35	29	33	26	21	40	28	38.

Zum Schlusse[74]) reiht sich dann noch eine Konstruktion *„des Quarrés Magiques par enceintes“* an, die im Sinne Stifel's (s. §. 14.) von aussen her durch einzelne Umläufe (Doppelgnomone) die Figur sukzessive aufbaut.

§. 20. Hatte sich De la Hire vorzugsweise darauf beschränkt, einen resumirenden Ueberblick über die zu seiner Zeit bereits vorliegenden Methoden zur Lösung der Fundamentalaufgabe zu geben und diese selbst unter verschiedenen neuen Gesichtspunkten zu behandeln, so gieng sein Nachfolger,

73) *De la Hire, Des quarrés magiques dont la racine est un nombre pair, Ibid.* S. 371. 74) *Ibid.* S. 378 ff.

der als scharfsinniger Forscher auch sonst*) bekannte Sauveur, auf ein viel weiter gestecktes Ziel los. Diess entnehmen wir sogleich aus den Eingangsworten seiner Arbeit; denn nachdem er die Einfachheit und Allgemeinheit der von ihm zu entwickelnden Methoden gerühmt, fährt er[77]) fort: „*Pour montrer la fécondité des principes que j'établis, j'ajoûte les Quarrés composez, les Enceintes, les Croix, les Chassis et les Cubes magiques*".

Da hier somit eine exakte Theorie der Zauberquadrate angestrebt ist, so sieht sich Sauveur genöthigt, eine Anzahl neuer Definitionen vorauszuschicken. Hier finden sich zuerst die Termini „*première*" und „*seconde diagonale*", jedes Quadrat wird durch zwei durch den Schwerpunkt den Seiten parallel gezogene Gerade in vier „*quartiers*" getheilt, und dergleichen mehr. Dieser Definitionskonnex erschwert natürlich das Studium sehr, und überdiess muss man gestehen, dass der Verfasser von dem glücklichen Talente seiner Landsleute, deutlich und präzis zu schreiben, ziemlich verlassen ist; diess mag wohl auch der Grund sein, warum man, trotz ihrer wissenschaftlichen Bedeutung, Sauveur's Abhandlung so selten zitirt findet.

Die Vorschriften zur Bildung ungerader Quadrate stützen sich auf eine tief durchdachte Symbolik. Jeder in ein Feld eingetragene Term wird aus zwei Zahlen zusammengesetzt gedacht, deren eine der Reihe A_1, A_2 . . . angehört, während die zweite in der anderen Reihe p_1, p_2 . . . sich finden muss. Dann gilt die Regel:

Jede Zahl eines magischen Quadrates von $(2n+1)^2$ *Zellen kann betrachtet werden als eine Summe von der Form*

$$A_i + p_k,$$

und zwar umfasst die Reihe A alle Zahlen zwischen 1 *und* $(2n+1)$,

*) Derselbe kann als der eigentliche Begründer einer physikalischen Musiktheorie angesehen werden[75]), und hat sich auch, wie Chasles[76]) bemerkt, mit verschiedenen damals schwierigen geometrischen Fragen erfolgreich beschäftigt.

75) *Whewell*, Geschichte der induktiven Wissenschaften, deutsch von J. J. v. Littrow, 2. Theil, Stuttgart 1840. S. 330. 76) *Chasles*, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohnke, Halle 1839. S. 240. 77) *Sauveur, Construction générale des quarrés magiques*, Mém. de l'acad. Année MDCCX. S. 92.

beziehungsweise $(-n)$ *und* $(+n)$, 0 *eingerechnet, die Reihe* p *dagegen alle Vielfachen von* $(2n+1)$.

Die hier angedeutete Zusammensetzung kann nun in sehr verschiedener Weise vorgenommen werden; Sauveur[78]) unterscheidet viererlei Methoden, nämlich „1. *par diagonales; 2. par indices; 3. par la méthode mixte; 4. par la méthode desordonnée*". Ohne uns auf eine nähere Schilderung der Verschiedenheiten einzulassen, begnügen wir uns an einem Beispiel die Verwendbarkeit jener Zerlegung nachzuweisen.

Es sei $A_1 = 10$, $A_2 = 5$, $A_3 = 20$, $A_4 = 0$, $A_5 = 15$ und $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 4$, $p_4 = 1$, $p_5 = 2$. Dann erhält man als schematisches und wirkliches Quadrat resp. die folgenden:

A_1+p_1 A_2+p_2 A_3+p_3 A_4+p_4 A_5+p_5	13 10 24 1 17
A_5+p_4 A_1+p_5 A_2+p_1 A_3+p_2 A_4+p_3	16 12 8 25 4
A_4+p_2 A_5+p_3 A_1+p_4 A_2+p_5 A_3+p_1	5 19 11 7 23
A_3+p_5 A_4+p_1 A_5+p_2 A_1+p_3 A_2+p_4	22 3 20 14 6
A_2+p_3 A_3+p_4 A_4+p_5 A_5+p_1 A_1+p_2	9 21 2 18 15.

Man erkennt leicht, dass diese Methode im Grunde nichts weiter als eine wissenschaftliche Durchbildung des hübschen Kunstgriffes von De la Hire ist, mit welchem wir uns im vorhergehenden Paragraphen zu beschäftigen hatten.

Unter den zahlreichen zum Theil auf älteren Vorarbeiten basirenden, zum grossen Theil jedoch völlig neuen Verfahrungsweisen, welche Sauveur vorführt, scheint die Methode „*Par Réciprocation*" besonderes Interesse zu verdienen[79]) und mag deshalb hier noch kurz besprochen werden. Dieselbe giebt nämlich eine Anweisung:

Aus einem vorliegenden magischen Quadrate durch Umtausch gewisser Felder fortwährend neue magische Quadrate herzustellen.

Zu diesem Zwecke charakterisirt man jede Zelle durch zwei unseren Indizes entsprechende Bestimmungsstücke; die Art und Weise wird aus dem in diesem Sinne ausgefüllten Quadrate von 64 Zellen erhellen, welches wir hier wiedergeben:

78) *Ibid.* S. 98. 79) *Ibid.* S. 120.

-7λ	7λ	-7λ	7λ	7λ	-7λ	7λ	-7λ
-7	5	-3	1	-1	3	-5	7
5λ	-5λ	5λ	-5λ	-5λ	5λ	-5λ	5λ
7	5	3	-1	1	-3	-5	-7
-3λ	3λ	-3λ	3λ	3λ	-3λ	3λ	-3λ
7	-5	-3	1	-1	3	5	-7
λ	$-\lambda$	λ	$-\lambda$	$-\lambda$	λ	$-\lambda$	λ
7	-5	3	-1	1	-3	5	-7
$-\lambda$	λ	$-\lambda$	λ	λ	$-\lambda$	λ	$-\lambda$
7	-5	3	-1	1	-3	5	-7
3λ	-3λ	3λ	-3λ	-3λ	3λ	-3λ	3λ
-7	5	-3	1	-1	3	-5	7
-5λ	5λ	-5λ	5λ	5λ	-5λ	5λ	-5λ
-7	5	-3	1	-1	3	-5	7
7λ	-7λ	7λ	-7λ	-7λ	7λ	-7λ	7λ
-7	-5	3	-1	1	-3	5	7

In diesem schematischen Quadrat, welches also in Wirklichkeit durch die Zahlen 1—64 ausgefüllt ist, wählen wir zwei beliebige der nämlichen Zeile angehörige Zellen, etwa die (in dem Schema umgrenzten) mit den Zahlen $(-7\lambda+3)$ und $(7\lambda-5)$. Zu diesen nehme man zwei andere der entsprechenden Zeile („*bande analogue*“ nach Sauveur) hinzu, die so beschaffen sind, dass sie mit jenen beiden kombinirt Null ergeben, also $(7\lambda-3)$ und $(-7\lambda+5)$. Die Differenz der unteren Zahlen in beiden ist bezüglich ± 2, und nun wähle man in zwei anderen homologen Zeilen je zwei weitere Zellen, die sich unter einander ebenso verhalten, wie die soeben betrachteten, solche sind z. B. $(3\lambda+5)$, $(-3\lambda-7)$; $(-3\lambda-5)$, $(3\lambda+7)$. Dann gilt der Satz:

Vertauscht man symmetrisch vier in der angegebenen Weise bestimmte Zellen gegen vier andere zusammengehörige, so bleibt der Charakter des magischen Quadrates erhalten.

Was Sauveur's Ausdehnung des Grundproblems auf Umläufe, Kreuze und Netze betrifft, so ist es, wenigstens für die

beiden ersten Gebilde, evident, dass sie sich unter die allgemeinen Regeln, die bereits für die ganzen Quadrate vorliegen, ohne Schwierigkeit bringen lassen. Auch für die Netze unterliegt diess keinem Zweifel, sobald man deren eigentliche Natur kennt, und wir fügen deshalb Sauveur's Erklärung dieser letzteren bei[80]): *„Le Chassis**) est un assemblage de deux ou de plusieurs bandes verticales, et d'autant de bandes horizontales, mais qui sont separez les unes des autres, et dont les verticales coupent les horizontales dans les diagonales, en sorte que le Quarré magique qui se trouve separé par ce Chassis, forme avec lui un Quarré total qui est encore magique"*. Man kann also in gewissem Sinne sagen: Ein magisches Netz ist mit einem magischen Rechteck identisch.

Was schliesslich den magischen Würfel anlangt, so können wir uns sehr kurz fassen, wenn wir bemerken:

Die Konstruktion eines magischen Würfels erfolgt genau nach den Prinzipien, welche bereits für Quadrate aufgestellt sind; nur muss jede in eine Würfelzelle eingeschriebene Zahl nicht mehr aus zwei, sondern nunmehr aus drei Summanden zusammengesetzt werden, deren jede einem bestimmten Systeme ganzzahliger Werthe angehört.

Zur Unterscheidung dieser drei Systeme verwendet unser Autor[82]) drei Alphabete, das grosse und kleine lateinische und das griechische — ein solcher Würfel von 125 Zellen stellt sich uns in Fig. 24 dar.

§. 21. Die Erhebung der bisher noch ziemlich inkohärenten Lehre von den magischen Quadraten zu einer wirklichen mathematischen Theorie war das Ziel, welches Sauveur vor Augen hatte; seinem Nachfolger, D'Ons-en Bray, war es lediglich um elegante Konstruktionsmethoden zu thun. Seine

---

*) Wir haben das Wort „Chassis" hier mit „Netz" wiedergegeben, weil es als solches, wohl auch als „Gitter" in älteren deutschen Werken mathematischen Inhalts vorkommt; man vergleiche z. B. Hindenburg's kombinatorische Untersuchungen[81]) über das Dechiffriren von Gitterschriften.

---

80) *Sauveur*, S. 124. 81) *Hindenburg*, Zusatz zu dem Aufsatz „Ueber Gitter und Gitterschrift," Archiv d. reinen u. angew. Mathem., 2. Band. S. 87 ff. 82) *Sauveur*, S. 129.

erste Methode[83]) zur Anfertigung gerad-gerader Quadrate läuft auf die zweite Regel des Moschopulos hinaus:

Man theilt das Quadrat von $16m^2$ Zellen in m^2 Einzelquadrate zu je 16 Zellen; dieselben mögen, stets von links nach rechts gezählt, als 1tes, 2tes ... ptes bezeichnet werden. Ist dann etwa

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

das pte Quadrat, so hat man zu setzen:

$a_{11}=1+8(p-1), a_{14}=4+8(p-1), a_{22}=6+8(p-1),$
$a_{23}=7+8(p-1), a_{43}=2+8(p-1), a_{42}=3+8(p-1),$
$a_{34}=5+8(p-1), a_{31}=8+8(p-1); a_{44}=16m^2-8(p-1),$
$a_{41}=16m^2-8(p-1)-3, a_{33}=16m^2-8(p-1)-5, a_{32}=16m^2-8(p-1)-6,$
$a_{12}=16m^2-8(p-1)-1, a_{13}=16m^2-8(p-1)-2, a_{21}=16m^2-8(p-1)-4,$
$a_{24}=16m^2-8(p-1)-7.$

Die zweite Methode[84]) konstruirt ungerad-gerade Quadrate durch Umläufe und legt Gewicht darauf, das nach Wegnahme des äusserten Umlaufs restirende Quadrat selbst wieder zu einem magischen zu machen. Diess innere Quadrat ist aber ein gerad-gerades, und so gewinnt man denn durch Rücksichtnahme auf das soeben auseinandergesetzte Verfahren nachstehende in Wirklichkeit unübertrefflich elegante Konstruktion:

Hat man ein magisches Quadrat von $[2(2m+1)]^2$ Zellen zu bilden, so betrachte man zuerst ausschliesslich das innere Quadrat von $(2 \cdot 2m)^2$ Zellen und mache dieses nach der vorigen Regel magisch, indem man jedoch bloss die Zahlen der Reihe

$$8m+3 \text{ bis } [2(2m+3)]^2-(8m+3)$$

zur Ausfüllung verwendet. Alsdann füge man den noch fehlenden Umlauf hinzu und fülle denselben mit den noch übrig gebliebenen Zahlen dergestalt aus, dass je zwei in Zeile oder Kolonne sich gegenüberstehende Zellen desselben zwei in Summe der Zahl

$$[2(2m+1)]^2+1$$

gleiche Werthe erhalten.

So ist das untenstehende Quadrat von $[2(2 \cdot 2+1)]^2$ Zellen konstruirt; der Uebersichtlichkeit halber schliesst sich der äussere Umlauf nicht unmittelbar an das innere Quadrat an:

---

83) *D'Ons-en Bray, Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra*, Mém. de l'acad. Année MDCCL. S. 242. 84) *Ibid.* S. 253.

5	94	90	92	97	86	1	18	14	8
95		19	81	80	22	27	73	72	30		6
88		78	24	25	75	70	32	33	67		13
99		26	76	77	23	34	68	69	31		2
84		79	21	20	82	71	29	28	74		17
3		35	65	64	38	43	57	56	46		98
16		62	40	41	59	54	48	49	51		85
10		42	60	61	39	50	52	53	47		91
12		63	37	36	66	55	45	44	58		89
93	7	11	9	4	15	100	83	87	96.		

§. 22. Wir kommen nun zu dem letzten Vertreter jener in §. 18 gekennzeichneten Bestrebungen französischer Gelehrten. Rallier des Ourmes war nicht eigentlich Mathematiker von Fach, aber er beschäftigte sich eifrig mit zahlentheoretischen Untersuchungen, vertrat diese Disziplin in der Redaktion der grossen Encyklopädie und kam so naturgemäss auch zu den magischen Quadraten, über die er eine umfassende Abhandlung[85]) verfasste.

Dabei leitete ihn weniger die Absicht, neue und originelle Schöpfungen hervorzubringen, vielmehr erwarb er sich ein entschiedenes Verdienst durch Verifikation bereits bekannter Methoden. Vor Allem der ersten Methode des Moschopulos widmet er eine sehr eingehende Aufmerksamkeit[86]) und stellt sie zu diesem Zwecke in einer neuen sowohl für die praktische Anwendung wie auch für den Beweis sehr brauchbaren Form dar.

Sehr gründlich ist auch seine Diskussion der verschiedenen die Umläufe zu Hülfe nehmenden Methoden[87]); Neues bringt er nicht, aber vom rein mathematischen Standpunkte aus sind seine Bemühungen vielleicht höher anzuschlagen, als die manches seiner Vorgänger, die zum Theil regere Erfindungskraft, nicht aber seinen Takt in der Behandlung algebraischer Ausdrücke besassen.

Nachdem wir im Vorstehenden den französchen Koryphäen gerecht zu werden gesucht haben, erwähnen wir noch kurz einiger ihrer Landsleute, die nebenher ein paar Beiträge zur

85) *Rallier des Ourmes*, *Mémoire sur les quarrés magiques*, Mém. de l'acad. Année MDCCLXIII. S. 196 ff. 86) *Ibid.* S. 212 ff. 87) *Ibid.* S. 218 ff.

Lehre von den Zauberquadraten lieferten. Vor Allem ist hier La Loubère, der von uns bereits Eingangs dieses Kapitels genannte Reisende anzuführen, welcher uns die Kenntniss der sogenannten indischen Methode vermittelt hat. Der Gegenstand hatte ihn so angeregt, dass er, in Gemeinschaft mit seinem Freunde Malezieu[88]), noch weiter darüber nachdachte, und vor Allem suchte er für die geradzelligen Quadrate eine Methode zu erdenken, welche der indischen für die ungeradzelligen entspräche. Ohne mit der einschlägigen Literatur vertraut zu sein, suchte er sich aus den von Agrippa v. Nettesheim (s. §. 10.) vorgeführten Beispielen Regeln zu abstrahiren, und gelangte so zu einem Verfahren, welches für gerad-gerade Quadrate mit dem des Moschopulos konform ist, für ungerad-gerade dagegen selbstständig diess letztere erweitert. Man wird dem hier mitgetheilten Probequadrat von 100 Zellen unschwer das Charakteristische des Verfahrens entnehmen können[89]):

1	99	98	4	96	5	7	93	92	10
90	12	88	87	15	16	84	83	19	11
80	79	23	24	76	75	27	28	72	21
31	69	33	34	66	65	37	38	62	70
60	42	58	57	45	46	44	53	49	51
41	52	48	47	55	56	54	43	59	50
61	39	63	64	35	36	67	68	32	40
30	29	73	74	26	25	77	78	22	71
20	82	18	17	85	86	14	13	89	81
91	2	3	97	6	95	94	8	9	100.

Natürlich hat auch Ozanam, der französische Schwenter, von den magischen Quadraten, die so recht für seine Zwecke gemacht schienen, Notiz genommen und ihnen in seinem Sammelwerke einen relativ grossen Raum angewiesen[90]). Jedoch behandelt er bei ungeraden Quadraten lediglich die Methode des Moschopulos sammt der ihr durch Bachet zu Theil gewordenen Erweiterung und bei geraden begnügt er sich spezielle Fälle anzuführen. Auch diejenigen Quadrate, welche als Fortschreitungsgesetz der einzelnen Terme die geometrische Progression zeigen, werden kurz betrachtet, und zum Schluss

88) *La Loubère, Du royaume de Siam*, S. 266. 89) *Ibid.* S. 273.
90) *Ozanam, Récréations mathématiques et physiques*, tome I., A Paris MDCCXXV. S. 82 ff.

folgt noch eine kleine Erweiterung der Theorie selbst[91]): „*Des Quarrez Magiques en proportion harmonique*“. Eigentliche Konstruktionsregeln fehlen indessen, und es begnügt sich der Verfasser, in einem speziellen Fall das Wesen eines solchen magischen Quadrates hervortreten zu lassen. Ein derartiges „harmonisches“ Quadrat von 9 Zellen ist das folgende:

$$\begin{array}{ccc} a & \frac{2ac}{a+c} & c \\ \frac{2ab}{a+b} & \frac{2bc}{b+c} & \frac{2abc}{2ab+ac-bc} \\ b & \frac{2abc}{2ac+ab-bc} & \frac{abc}{ab+ac-bc}. \end{array}$$

Auch in seinem mathematischen Wörterbuch[92]) schaltet Ozanam einen kurzen Exkurs über dies Thema ein, und es wird das in einer deutschen Rezension dieses Werkes in den „*Acta Eruditorum*“ dem Buche als Vortheil angerechnet.

§. 23. Kehren wir jetzt auf deutschen Boden zurück, um zu untersuchen, was dort geleistet wurde während jenes Zeitraumes, der in der uns hier interessirenden Frage ein französisches Gepräge trägt. Gross ist die Ausbeute nicht, nur Ein Name leuchtet uns mit freilich um so hellerem Glanze entgegen.

Ungefähr zu gleicher Zeit mit Frénicle veröffentlichte der deutschpolnische Jesuit Kochanski eine kleine Abhandlung über magische Quadrate[93]). Neu ist in derselben — abgesehen von der hier zuerst vorkommenden Erwähnung des magischen Würfels — seine Konstruktion der Subtraktionsquadrate (*quadrata subtractionis*), von denen wir nachstehend eine Probe geben:

1	6	13	2
10	5	14	9
7	12	11	16
8	3	4	15

12	21	16	7	3
1	15	24	18	9
6	4	13	22	20
17	8	2	11	25
23	19	10	5	14.

Bei einem Subtraktionsquadrat muss, wenn $p_1, p_2 \cdots p_r$ *die*

91) *Ibid.* S. 101. 92) *Id. Dictionnaire mathématique,* Paris 1690. S. 11. 93) *Kochanski, Considerationes quaedam circa Quadrata et Cubos Magicos, nec non aliquot Problemata, omnibus Arithmophilis ad investigandum proposita,* Acta Erudit. Annus 1686. S. 391 ff.

in einer beliebigen Reihe (Zeile, Kolonne oder Diagonale) befindlichen Zahlen sind, unter Voraussetzung der Ungleichheiten

$$p_1 > p_2 > p_3 \cdots > p_r$$

die algebraische Summe

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \cdots$$

eine konstante Zahl sein. Je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist, kommt in dieser Summe das positive Zeichen $\frac{r}{2}$ *oder* $\left(\left(\frac{r}{2}\right) + 1\right)$ *mal vor.*

Die Bildung solcher Quadrate fällt unter die gleichen theoretischen Gesichtspunkte wie die der gewöhnlichen, insofern man in dem die Lösung liefernden System diophantischer Gleichungen auch negative Zahlen zulässt.

Indem wir eine Reihe empirischer Schriften*), wie die von Rohlfs [95]), Capito [96]) etc. der Vollständigkeit zuliebe blos kurz anführen, fassen wir mit kurzen Worten Alles zusammen, was im Laufe des siebzehnten Jahrhunderts von deutschen Gelehrten für unsere Spezialdisziplin geleistet wurde.

Der bekannte Rechner Claussberg giebt in einem Anhang zu seinem weitläufigen Rechenbuche eine kurze Anweisung zur Verfertigung magischer Quadrate [97]), die jedoch ganz auf Stifel'schen Grundsätzen beruht. Wissenschaftlicher gehalten, aber ebenfalls mit den oft genialen Untersuchungen der Franzosen nicht vergleichbar ist eine Studie von Vieth in Dessau. Derselbe [98]) stellt einige allgemeine Betrachtungen über solche

*) Hierher gehört auch jenes eigenthümliche holländische Werk [94]), in welchem wir früher irrthümlich die ersten Spuren der Bachet'schen Terrassenmethode aufzufinden geglaubt hatten.

94) *Veritas quadrata mathematica, physica, philologica, theologica,* Amstelodami MDCCLXV. 95) *Rohlfs,* Künstliches Zahlenspiel, oder gründliche Anweisung, wie die sogenannten magischen Quadrate zu verfertigen, Buxtehude 1742. 96) *Capito,* Alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen, d. i. die Zahlen aller geraden und ungeraden Quadraten gründlich auszurechnen, leicht zu ordnen, und viele Millionenmal eben so leicht zu verändern, dass sie in die Länge, Breite, und über's Creutz einerlei, und die verlangte Summe bringen, Glückstadt 1767. 97) *v. Claussberg,* Demonstrative Rechenkunst, Leipzig 1795. S. 1585 ff. 98) *Vieth,* Ueber die pythagorischen (sic) Tafeln, Leipz. Magazin f. reine u. angew. Mathem., 2. Stück. S. 228 ff.

Gebilde an und giebt dann je eine Methode für gerade und ungerade Zellenzahl, welche er selbst erfunden zu haben behauptet; sie weichen jedoch von anderen bekannten in keiner Weise ab. Wichtiger als die Abhandlung selbst sind zwei Zusätze von Kästner und Hindenburg[99]), welche genaue historische Notizen enthalten.*)

Obwohl bereits dem folgenden Jahrhundert angehörig möge doch auch noch die kurze rein didaktische Behandlung der Zauberquadrate hier ihre Stelle finden, die von Lorenz[103]) herrührt. Ohne zu prätendiren, dass er irgendwie Neues vorbringe, begnügt sich derselbe, für ungerade und geradgerade Zellenzahl je die erste Methode des Moschopulos auseinanderzusetzen; das Quadrat von 36 Zellen wird rein empirisch komponirt.

§. 24. Wir erwähnten weiter oben, dass Ein deutscher Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts über das Niveau hinausgegangen sei, auf welchem sich im Uebrigen seine Landsleute bewegten. Merkwürdigerweise ist die betreffende Arbeit so gut wie unbekannt, nur wenige werden wissen, dass Leonhard Euler, der — sehr im Gegensatz zu gewissen neueren Grössen — keinem Seitengebiete seiner Wissenschaft fremd blieb, eine voluminöse Abhandlung über die magischen Quadrate verfasst und in einer freilich dem literarischen Verkehr ziemlich entrückten holländischen Zeitschrift niedergelegt hat[104]). Allerdings ist Euler's Auffassung des Problems etwas von derjenigen verschieden, welche wir bisher fast ausschliesslich

*) Den hier genannten geschichtlichen Uebersichten reihen sich diejenigen an, welche Reuss[100]), Müller[101]) und Brandes[102]) gegeben haben. Dieselben ergänzen sich sehr glücklich gegenseitig, und nur ihnen verdanken wir es, wenn es uns gelungen sein sollte, das so massenhaft vorhandene Material ohne wesentliche Lücke zusammengebracht und gesichtet zu haben.

99) *Hindenburg,* Zusatz des Herausgebers, *Ibid.* S. 240 ff. 100) *Reuss, Repertorium commentationum a societatibus litterariis editarum*, tom. VII., Gottingae 1808. S. 29 ff. 101) *Müller,* Auserlesene mathematische Bibliothek, Nürnberg 1820. S. 226 ff. 102) *J. S. T. Gehler's* physikalisches Wörterbuch, 2. Aufl., 6. Band, Leipzig 1836. S. 636 ff. 103) *Lorenz*, Lehrbegriff der Syntaktik und Kombinationslehre, Magdeburg 1806. S. 491 ff. 104) *L. Euler, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*, Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wettenschappen te Vlissingen, Negende Deel. S. 85 ff.

vorgefunden haben; aber gerade deshalb bietet sie auch besonderes Interesse und giebt uns Gelegenheit, eine ganz neue Seite in Euler's wissenschaftlicher Thätigkeit zu erkennen. Bewundern wir in der Mehrzahl seiner Schriften die staunenswerthe Handhabung der analytischen Methode, so lernen wir ihn hier als eleganten Kombinatoriker kennen, der schon in mancher Beziehung die Regeln der kombinatorischen Analysis antizipirt.

Bekanntlich gab zu einer grossen Anzahl Euler'scher Abhandlungen irgend eine zufällig sich ihm darbietende häufig triviale Frage Gelegenheit, die er dann nach allen Seiten auszubeuten verstand. So auch hier; zu seiner Untersuchung fühlte er sich provozirt durch eine Aufgabe, die er im Eingang mit folgenden Worten beschreibt: *„Cette question rouloit sur une assemblée de 36 Officiers de six différens grades, qu'il s'agissoit de ranger dans un quarré, de manière que sur chaque ligne tant horizontale que verticale il se trouve six officiers tant de différens caractères que de Régimens différens"*.

Die Lösung dieser Aufgabe hält Euler — ohne sich allerdings darüber völlig befriedigende Rechenschaft geben zu können — für unmöglich; denn von den drei Bedingungen, denen dieselbe zu genügen hat, können zwei auf sehr viele verschiedene Weisen erfüllt werden, ohne dass bei irgend einer derselben auch die dritte Berücksichtigung fände. Betrachtet man aber ein solches für die beiden ersten Bedingungen ausreichendes Arrangement, wie z. B. das hier nebenstehende, so kann dasselbe ohne weiteres in ein magisches Quadrat umgewandelt werden:

$a\alpha$ $b\zeta$ $c\delta$ $d\varepsilon$ $e\gamma$ $f\beta$
$b\beta$ $c\alpha$ $f\varepsilon$ $e\delta$ $a\zeta$ $d\gamma$
$c\gamma$ $d\varepsilon$ $a\beta$ $b\zeta$ $f\delta$ $e\alpha$
$d\delta$ $f\gamma$ $e\zeta$ $c\beta$ $b\alpha$ $a\varepsilon$
$e\varepsilon$ $a\delta$ $b\gamma$ $f\alpha$ $d\beta$ $c\zeta$
$f\zeta$ $e\beta$ $d\alpha$ $a\gamma$ $c\varepsilon$ $b\delta$

Hat man ein solches Arrangement, denkt sich zwischen je einen lateinischen und griechischen Buchstaben das + Zeichen gesetzt und ertheilt sukzessive den lateinischen Lettern alle Werthe der Zahlenreihe $o, n, 2n \ldots (n-1)\,n$, *den griechischen alle Werthe der Zahlenreihe* $1, 2, 3 \ldots n$, *so hat man, wie diess bereits Sauveur (s. §. 20.) ausgeführt hat, ein magisches Quadrat von* n^2 *Zellen.*

Um eine übersichtlichere Bezeichnung zu erhalten, wendet dann Euler[105]) anstatt dieser Buchstaben Zahlen an, so jedoch,

105) *Ibid.* S. 89.

dass er nunmehr eine symbolische Exponentenbezeichnung *) einführt und

$$f\delta \equiv 6^4$$

setzt. In jedem solchergestalt gebildeten Quadrate werden dann n *„formules directrices“* unterschieden, d. h. n verschiedene Reihenfolgen der den aufsteigenden Grundzahlen beigesetzten Exponenten, wenn man von der Linken zur Rechten fortschreitet. Wir stellen hier ein 49zelliges Quadrat seinen sieben „Bestimmungsreihen“ gegenüber:

1^1	2^6	3^4	4^3	5^7	6^5	7^2		1	6	7	3	4	2	5
2^2	3^7	1^5	5^4	4^1	7^6	6^5		2	5	4	6	1	3	7
3^3	6^1	5^6	7^5	1^2	4^7	2^4		3	1	2	4	7	5	6
4^4	5^2	6^7	1^6	7^3	2^1	3^5		4	7	3	5	6	1	2
5^5	1^3	7^1	2^7	6^4	3^2	4^6		5	4	1	7	2	6	3
6^6	7^4	4^2	3^1	2^5	5^3	1^7		6	2	5	1	3	7	4
7^7	4^5	2^3	6^2	3^6	1^4	5^1		7	3	6	2	5	4	1.

Diese Bestimmungsreihen in möglichster Allgemeinheit für jedes n zu finden, ist Euler's Absicht, und da eine generelle Methode hiezu nicht zu existiren scheint, so gilt es, die Forderungen zu spezialisiren. Euler sagt[106]): *„La formation des formules directrices est donc le premier et le principale objet dans ces recherches; mais je dois avouer, que jusqu'ici je n'avois aucune méthode sure qui puisse conduire à cette investigation“.*

Die Untersuchung zerfällt nun in vier Theile, je nachdem nämlich aus einer in willkürlicher Ordnung hingeschriebenen Bestimmungsreihe eine neue durch *„simple“*, *„double“*, *„triple“* oder *„quadrouple marche“* abgeleitet wird[107]). Es hat keine Schwierigkeit, diese Klassifikation beliebig weiter fortzusetzen, und so kann man im Sinne Euler's folgende Definition aufstellen:

Es sei gegeben die Zahlenreihe

$$1, 2, 3, 4\,5 \ldots n-1, n, n+1 \ldots 2n-1, 2n, 2n+1 \ldots;$$

aus ihr soll durch eine „$n$fache Vertauschung“ eine neue gebildet werden. Dieselbe wird, wenn die zu vertauschende Reihe aus

*) Diese Symbolik Euler's bewegt sich, wie man leicht bemerkt, schon ganz im Geiste der durch Hindenburg eingeleiteten Neuerungen.

106) *Ibid.* S. 94. 107) *Ibid.* S. 97 ff.

der Anfangsreihe durch $p(<n)$fache Vertauschung hervorgegangen ist, diese sein:

$$p+1, p+2, p+3 \ldots n-1, 1, 2 \ldots p, p+n+1, p+n+2 \ldots$$

Wie schon aus dem Obigen hervorgeht, begnügt sich Euler die Untersuchung nur für $n = 1, 2, 3, 4$ zu führen; zahlentheoretische und kombinatorische Betrachtungen wechseln hierbei mit einander ab.

Die Anwendung auf die Konstruktion wirklicher magischer Quadrate tritt hierbei in den Hintergrund, und nur an Einer Stelle[108]) gedenkt der Verfasser seines eigentlichen Vorwurfes. Wir begnügen uns deshalb auch, auf die Wichtigkeit dieser vergessenen, gewiss aber einer eingehenden Beachtung würdigen Leistung des grossen Mathematikers hingewiesen zu haben.

§. 25. Wir schieben hier noch eine kurze Notiz über die Resultate ein, welche ein auf anderem Gebiete bekannterer Forscher, der Physiker Benjamin Franclin, bei seiner Beschäftigung mit den magischen Quadraten erhalten hat. In einem Briefe an Collinson[109]) erwähnt er es als eines eigenthümlichen Umstandes, dass anscheinend kein englischer Mathematiker sich mit diesem Gegenstande beschäftigt habe, wohl deshalb, weil dem praktischen Sinne seines Volkes das Vergnügen an solchen *„difficiles nugae"* fehle. Ein gewisser *„Stifelius"* habe ein Quadrat von 16^2 Zellen konstruirt; er aber gäbe eine andere Methode zu diesem Zweck an. Dieselbe ist nun in der That ganz originell, jedoch blos für gerad-gerade Zellenzahl anwendbar. Wir geben (Fig. 25.) sein Paradigma wieder, dem die Eigenthümlichkeit des Verfahrens leicht abzusehen ist. Der Beweis wird sehr einfach zu erbringen sein, wie wir wenigstens für eine Reihenkategorie zeigen wollen. Betrachten wir eine der $2m$ Zeilen des Quadrates von $(4m)^2$ Zellen, in welchen abwechselnd eine der Zahlen $1, 2 \ldots 2m$ vorkommt, etwa diejenige, welche die Zahl $p(\geq 1, \leqq 2m)$ enthält. Aus der Zusammensetzung dieses Quadrates erhellt, dass die Zahlen dieser Reihe sich folgendermassen in zwei Klassen sondern lassen:

108) *Ibid.* S. 143. 109) *Franclin, Experiments and observations on Electricity . . . To which are added Letters and Papers on philosophical Subjects,* London MDCCLXIV. S. 350.

$$\begin{array}{ll} p & 16m^2 - (p-1) \\ 8m - (p-1) & 16m^2 - (8m-p) \\ 8m - (p-2) & 16m^2 - (8m-p-1) \\ 16m - (p-1) & 16m^2 - (16m-p) \\ 16m - (p-2) & 16m^2 - (16m-p-1) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Addirt man alle diese Zahlen und bedenkt, dass jede Klasse $2m$ Summanden aufweist, so wird die Summe offenbar

$$\Sigma = 16m^2 \cdot 2m + 2m = 32m^3 + 2m,$$

wie es denn in der That auch sein muss. Aehnlich, nur noch einfacher, lässt sich der Summenwerth der Kolonnen und Diagonalen verifiziren.

Nicht zufrieden mit den magischen Quadraten selbst suchte Franclin noch allerhand Künsteleien an seinem Probleme anzubringen und bildete einen magischen Kreis. Da aber diese Erweiterung gar kein weiteres Interesse bietet*), so wird es hinreichen, das Wesen derselben mit des Urhebers eigenen Worten zu schildern. Er sagt[111]) von seinem Kreis: *„Its properties, besides those mentioned in my former, are these. Half the number in any radial row, added with half the central number, make 280, equale to the number of degrees in a semi-circle. Also half the numbers in any one of the concentric circles, taken either above or below the horizontal double line, with half the central number, make 180. And if any four adjoining numbers, standing nearly in a square, be taken from any part, and added with half the central number, they make 180“.* Die Anzahl der konzentrischen Kreise ist neun.

§. 26. Es war mit dem Beginn des neuen Jahrhunderts ein solcher Ueberfluss von wesentlich unverarbeitetem Stoff zusammengekommen, dass vor Allem eine kundige Hand erfordert wurde, um eine Sichtung und Zusammenstellung des Materiales vorzunehmen. Dieses Verdienst, einen Extrakt aus den bedeutenderen Leistungen der vergangenen Jahrhunderte zu liefern und die ganz inkohärenten Einzelbearbeitungen zu

*) Franclin's Konstruktion ist auch nicht exakt; vielmehr soll[110]) ein gewisser Dalby verschiedene Fehler in derselben aufgefunden haben.

110) *Muncke*, S. 639. 111) *Franclin*, S. 354 ff.

einem Ganzen zu vereinigen, suchte sich ein wackerer deutscher Mathematiker, Brandan Mollweide, zu erwerben, und man wird nicht anstehen, seine Bemühung wenigstens bis zu einem gewissen Grade für gelungen zu erklären. Seine Schrift[112]) zerfällt in zwei Unterabtheilungen.

Die erste stellt zunächst — nach einer kurzen historischen Einleitung — das eigentliche Wesen der magischen Quadrate, sowie die leitenden Grundsätze fest, nach welchen bei ihrer Anfertigung verfahren werden muss. Dabei ist ein prinzipieller Unterschied zwischen der Auffassung Mollweide's und der seiner sämmtlichen Vorgänger:

Alle Gelehrte, welche vor Mollweide sich mit magischen Quadraten befassten, legten eine theils bereits bekannte, theils von ihnen auf experimentellem Wege gefundene Methode zu Grunde, die sie hernach erst bewiesen und modifizirten; Mollweide aber fasst zuerst das Problem allgemein und zeigt: Zur Konstruktion eines magischen Quadrats von n^2 Zahlen

$$a_{1,1},\ a_{1,2} \ldots a_{n,n}$$

ist die Auflösung der $2(n+1)$ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{k,i}\ (i = 1, 2 \ldots n) = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{k,i}\ (k = 1, 2 \ldots n) = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{k,k} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{k,n-k+1} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

durch ganzzahlige Werthe erforderlich. Mollweide hat also im Grunde zuerst die Bildung eines magischen Quadrates naturgemäss formulirt als ein Problem der Zahlentheorie.

Wenn aber auch diess Verdienst Mollweide unbedingt zugestanden werden muss, so hat er doch nur für die einfachsten speziellen Fälle einen Versuch zur Lösung gemacht. Vom elften Paragraph ab[113]) wendet er sich zu der Methode, die Quadrate durch Umläufe zu bilden, und sucht dieselbe ganz

112) *Mollweide, De quadratis* etc. 113) *Ibid.* S. 11.

allgemein algebraisch festzustellen. Wir brauchen uns hierbei nicht aufzuhalten, denn wir haben schon früher auf diese seine Bestrebungen, die Verfahrungsweisen von Stifel, D'Ons-en-Bray etc. in die Sprache der neueren Mathematik einzukleiden, mehrfach hingewiesen.

Der zweite Theil der Schrift[114]) diskutirt die verschiedenen Methoden des Moschopulos; jedoch glauben wir, dass seine Betrachtungen denjenigen, durch welche wir die Richtigkeit jener darzuthun versucht haben, an Uebersichtlichkeit nachstehen. Am Schluss ist dann noch kurz von doppelt-magischen Quadraten die Rede.

Alles in Allem ist das, was Mollweide an Theorie giebt, wie wir schon bemerkten, für jene Zeit sehr verdienstlich; dagegen vernachlässigt er die eigentliche Praxis, die doch hier ganz besonders ins Gewicht fällt, fast gänzlich. Diesem Mangel abzuhelfen ist offenbar der Abschnitt bestimmt, welchen er in seiner Fortsetzung des Klügel'schen Lexikons den magischen Quadraten widmet, und der, ohne sich auf eigentlich wissenschaftliche Erörterungen einzulassen, eine sehr deutliche Anweisung zur wirklichen Formation solcher Gebilde enthält, und zwar mit Bezugnahme auf historische Entwickelung der Lehre. Wir haben im Vorstehenden so oft schon Bezug auf dieses Werk genommen, dass eine Neubehandlung lediglich als eine Rekapitulation anzusehen wäre.

§. 27. Nach Mollweide vergeht wiederum eine lange Zeit, ohne dass der Geschichtschreiber eine namhafte Leistung auf diesem Gebiete anzuführen hätte. Eine im Jahre 1837 erschienene Schrift von Hohndell[115]) scheint auf einem ziemlich handwerksmässigen Standpunkte zu stehen; wir konnten sie nicht selbst vergleichen, sondern beziehen uns lediglich auf das Urtheil eines Mannes, der, ohne studirter Mathematiker zu sein, doch bedeutende mathematische Kenntnisse besass und besonders in unserem Fache eines gewissen Rufes genoss. Es ist diess C. W. Zuckermandel, der sich als Privatlehrer in Nürnberg aufhielt und daselbst ein kleines Werk über die Zauberquadrate schrieb[116]).

---

114) *Ibid.* S. 37 ff. 115) *Hohndell*, Praktische Anleitung zur Bildung und Berechnung magischer oder sogenannter Zauberquadrate, Leipzig 1837. 116) *Zuckermandel*, Regeln, nach denen alle Zauberquadrate, mit gleichen

Mag auch der Charakter einer Konkurrenzschrift jenes abfällige Urtheil einigermassen mitbedingt haben, so geht doch aus einem Vorwurfe, den er gegen Hohndell erhebt[117]), hervor, dass derselbe nicht das richtige Verständniss des Sachverhaltes besessen habe.*)

Was nun das Büchlein von Zuckermandel selbst betrifft, so giebt es eine leichtfassliche besonders für den Praktiker berechnete Anweisung zur Bildung aller möglichen magischen Quadrate; es finden sich vor die Terrassenmethode, die Regeln Stifel's, Poignard's, D'Ons-en-Bray's und andere, jedoch ohne Angabe der eigentlichen Erfinder, deren Namen der von literarischen Hülfsmitteln sehr entblösste Verfasser wohl selbst nicht kannte.

Der Umstand, dass die wahrhaftig nicht unbedeutenden Arbeiten der Franzosen wie auch Euler's dem weitaus grössten Theile des mathematischen Publikums entgangen waren, hatte die natürliche Folge, dass gar manches von dem, was in ihren Abhandlungen bereits fertig vorlag, von Neuem gethan werden musste. Da aber seit jener Periode immerhin eine geraume Zeit verflossen war, während welcher die Hülfsmittel zur Be-

*) Dieser Vorwurf besteht nämlich darin, dass Hohndell es für absolut nothwendig gehalten habe, in das Mittelfeld ungeradzelliger Quadrate stets die Zahl $\frac{n^2+1}{2}$ zu setzen. Diess beruht offenbar auf einem nicht eben ferne liegenden Trugschluss. Stellt man für 9 Zellen die 8 Bedingungsgleichungen

$$a+b+c=d+e+f=g+h+i=a+d+g=b+c+h=e+f+i$$
$$=a+e+i=c+e+g=15$$

auf, so kann man durch eine leichte Rechnung

$$e=5=\frac{9+1}{2}$$

finden. In der That nun giebt es für das magische Quadrat von 9 Zellen nur diese eine Mittelzahl, andererseits aber lässt sich die eben erwähnte Berechnungsmethode bei jedem willkürlichen Quadrate anwenden, und nun schien es allerdings ganz plausibel, weiter zu schliessen: Also existirt für jedes magische Quadrat ungerader Zellenzahl nur eine einzige Mittelzahl. Allein schon die zweite Methode des Moschopulos lehrt uns, dass von einer Nothwendigkeit hier gar keine Rede sein könne.

Liniensummen, leicht und schnell, auf eine spielende Art, gebildet werden können, Nürnberg 1838. 117) *Ibid.* S. 7.

handlung solcher Fragen nach allen Richtungen an Ausdehnung gewonnen hatten, so konnte es nicht fehlen, dass trotzdem jene Neubearbeitungen beträchtliche Fortschritte verrathen. Besonders gilt diess von einer Schrift[118]) von Hugel.

Dieselbe ist in der Hauptsache einer gründlichen wissenschaftlichen Durcharbeitung der von Sauveur und Euler präzisirten Grundsätze gewidmet, geht aber in der Allgemeinheit ihrer Resultate weit über jene Anfänge hinaus.

Der Verfasser geht nämlich, wie jene Mathematiker, aus von zwei quadratischen Schematen, welche er bezüglich als „grosse" und „kleine Formel" bezeichnet[119]). Wir stellen dieselben, in der Bezeichnung Hugel's, hier einander gegenüber:

A	B	C	D	...	M	N
1	2	3	4		$p-1$	p
A	B	C	D	...	M	N
$1+\alpha$	$2+\alpha$	$3+\alpha$	$4+\alpha$		$p-1+\alpha$	$p+\alpha$
A	B	C	D	...	M	N
$1+2\alpha$	$2+2\alpha$	$3+2\alpha$	$4+2\alpha$		$p-1+2\alpha$	$p+2\alpha$
. . . . .						
A	B	C	D	...	M	N
$1+(p-1)\alpha$	$2+(p-1)\alpha$	$3+(p-1)\alpha$	$4+(p-1)\alpha$		$p-1+(p-1)\alpha$	$p+(p-1)\alpha$

a	b	c	...	n
1	2	3		p
a	b	c	...	n
$1+\beta$	$2+\beta$	$3+\beta$		$p+\beta$
a	b	c	...	n
$1+2\beta$	$2+2\beta$	$3+2\beta$		$p+2\beta$
. . . . .				
a	b	c	...	n
$1+(p-1)\beta$	$2+(p-1)\beta$	$3+(p-1)\beta$		$p+(p-1)\beta$.

Lässt man nun die Zahlen α, β, A, B ... innerhalb an sich beliebiger Grenzen variiren und addirt zwei homologe Zellen der beiden Schemata zusammen, so erhält man stets ein gewisse Bedingungen erfüllendes Quadrat.

In dieser Formel sind also gewiss die meisten, wenn nicht

118) *Hugel*, Die magischen Quadrate mathematisch behandelt und bewiesen, Ansbach 1859. 119) *Ibid.* S. 7.

alle die Methoden verborgen, welche wir bisher kennen lernten*). Es möge diess nur an zwei Fällen nachgewiesen werden. Setzt man

$$\alpha = 2p - 1; \quad A, B, C \cdots \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2} \cdots 0, 1;$$

$$\beta = \frac{3p-1}{2}; \quad a, b, c \cdots \quad 2, \quad 4 \quad \cdots p-1$$

so erhält man, woferne p eine ungerade Zahl ist, die in §. 2. untersuchte indische Methode. Ebenso liefert für

$$\alpha = 2p - 1; \quad A, B, C \cdots 0, \frac{p+1}{2}, 1 \cdots$$

$$\beta = p + 1; \quad a, b, c \cdots \frac{p+1}{2}, p, \frac{p-1}{2} \cdots$$

jene Grundrelation die erste Regel des Moschopulos.

§. 28. In der allerneuesten Zeit hat die Lehre von den magischen Quadraten in England Anklang gefunden. Den

*) Die Hugel'sche Arbeit verdient des sie durchdringenden Strebens nach Allgemeinheit halber volle Anerkennung, und wir gestehen, dass wir sie bei früheren Besprechungen nicht ihrem wahren Werthe nach würdigten, obwohl wir stets die Neuheit der Methode anerkannten — dass schon Sauveur und Euler ähnliche Gedanken hegten, kann Hugel's Priorität keinen Eintrag thun. Nur glauben wir an unserer früher ausgesprochenen Ansicht festhalten zu müssen, dass gerade in einer praktisch irrelevanten Lehre neben der Allgemeinheit auch auf elegante Detailmethoden Gewicht zu legen ist; die Schrift enthält solche allerdings in grosser Anzahl, aber so kondensirt, dass es wieder besonderer Aufmerksamkeit bedarf, sie herauszufinden. Der Leser wird stets den Wunsch empfinden, es möchte ihm diese Mühe etwas mehr erleichtert sein.

Der Güte des Herrn Verfassers verdanken wir den Einblick in eine von ihm für den Druck vorbereitete Abhandlung, welche die Betrachtungen jener ersten Studie weiterzuführen bestimmt ist. Dieselbe steht selbstverständlich auf dem nämlichen Standpunkt, wie jene, dehnt aber die einzelnen Sätze viel weiter aus und führt dadurch ein ganz neues Element ein, dass nun von der abgekürzten Sprache der Zahlentheorie umfassend Gebrauch gemacht wird. Viele Rechnungen, welche in ihrer früheren Form einen komplizirten Eindruck machten, vereinfachen sich wesentlich durch die konsequente Anwendung des Kongruenzenkalküls. Nur würden wir, was die formelle Seite anlangt, die Unterscheidung der einzelnen Terme einer Kategorie durch Indices wünschen.

Auch die Theorie der magischen Würfel, für die Sauveur (s. §. 20.) und Koschanski (s. §. 23.) nur einige schwache Andeutungen gegeben hatten, wird hier *in extenso* behandelt. Wir hoffen der interessanten Untersuchung bald im Drucke wieder zu begegnen.

Anfang scheint Thompson gemacht zu haben, der sich[120]) die Aufgabe stellte, aus einem vorgelegten magischen Quadrate von n^2 Zellen ein neues von $(pn)^2$ Zellen abzuleiten. Da die verschiedenen Vorschläge, welche er macht, ziemlich von demselben Grundgedanken getragen sind, überdiess, wie sich das von selbst versteht, des Beweises nirgends entbehren, so halten wir es für ausreichend, wenn wir die erste und zugleich eleganteste Methode des Verfassers hier auseinandersetzen. Dieselbe ist diese:

Gegeben ist ein magisches Quadrat von n^2 Zellen, aus diesem soll ein anderes von $(np)^2$ Zellen abgeleitet werden. Man konstruire dieses, theile dasselbe in p^2 Einzelquadrate von je n^2 Zellen und vergleiche es mit einem bereits vorhandenen Quadrate von p^2 Zellen. Dieses letztere möge dieses sein:

$$\text{I.} \quad \begin{matrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{matrix};$$

ganz ebenso möge das grosse Quadrat von $(np)^2$ Zellen geschrieben werden, also

$$\text{II.} \quad \begin{matrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p,1} & \dots & \alpha_{p,p} \end{matrix},$$

so dass mithin jedes α selbst wieder ein Quadrat von n^2 Zellen repräsentirt. Ist im Quadrat I. $a_{i,k} = 1$, *so ist in* II. *das Einzelquadrat $\alpha_{i,k}$ mit allen Zahlen zwischen* 1 *und n^2 zu besetzen; ist in* I. $a_{l,m} = 2$, *so enthält das Einzelquadrat $\alpha_{l,m}$ alle Zahlen zwischen n^2 und $2n^2$, so zwar, dass die Zahlen p und $n^2 + p$ homologe Zellen einnehmen, und in dieser Weise wird fortgefahren, bis sämmtliche Zellen besetzt sind.*

Es sei z. B. $n = 5$, $p = 3$, und man gehe von den beiden magischen Quadraten

12	21	20	9	3				
1	15	24	18	7		4	9	2
10	4	13	22	16	und	3	5	7
19	8	2	11	25		8	1	6
23	17	6	5	14				

120) *Thompson*, *On magic squares*, Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Vol. X. S. 186 ff.

aus. Dann bekommt man folgendes Quadrat von $(3.5)^2 = 225$ Zellen:

87	96	95	84	78	212	221	220	209	203	87	46	45	34	38
76	90	99	93	82	201	215	224	218	207	26	40	49	43	32
85	79	88	97	91	210	204	213	222	216	35	29	38	47	41
94	83	77	96	100	219	218	202	211	225	44	33	27	36	50
98	92	81	80	89	223	217	206	205	214	48	42	31	30	39
62	71	70	59	53	112	121	120	109	103	162	171	170	159	153
51	65	74	68	57	101	115	124	118	107	151	165	174	168	157
60	54	63	72	66	110	104	113	122	116	160	154	163	172	166
69	58	52	61	75	119	118	102	111	125	169	158	152	161	175
73	67	56	55	64	123	117	106	105	114	173	167	156	155	164
187	196	195	184	178	12	21	20	9	3	137	146	145	134	128
176	190	199	193	182	1	15	24	18	7	126	140	149	143	132
185	179	188	197	191	10	4	13	22	16	135	129	138	147	141
194	183	177	186	200	19	8	2	11	25	144	133	127	136	150
198	192	181	180	189	23	17	6	5	14	148	142	131	130	139

Wir glauben hiermit Thompson's schönes Verfahren präziser dargestellt zu haben, als diess im Original geschah; auch dürfte das von uns gewählte Beispiel dasjenige des Verfassers ($(3.3)^2$ Zellen) an Uebersichtlichkeit übertreffen.

Ein anderer englischer Mathematiker, dessen wir hier gedenken müssen, ist Drach. Derselbe giebt Methoden, um geradzellige Quadrate vom Kernquadrate aus durch Umläufe allmählich entstehen zu lassen[121]; man erkennt jedoch bald, dass seine Betrachtungen, natürlich allgemeiner und eleganter gefasst, auf diejenigen von Frénicle (s. §. 18.) hinauslaufen. Ebensowenig kann von der an sich sehr verdienstlichen Arbeit Horner's gesagt werden, dass sie etwas Neues liefere[122]; denn ähnliche Ideen, wie er sie vorträgt, finden sich schon angedeutet bei De la Hire, Sauveur und Euler, durchgeführt und auf alle mögliche Weise abgeändert in dem im vorigen Paragraphen besprochenen Werkchen von Hugel.

§. 29. Ueberhaupt wird man zugestehen mässen, dass die Lehre von den magischen Quadraten einen vorläufigen Ab-

121) *Drach, An easy general rule for filling up all magic squares,* Messenger of Mathematics, 1873. S. 169 ff. 122) *Horner, On the algebra of magic squares,* Quart. Journ. Vol. XI. S. 57 ff., S. 123 ff.

schluss erhalten hat, und dass, ohne Hineintragung eines völlig neuen Gesichtspunktes, bedeutende Fortschritte nicht mehr zu erwarten sind. Es mögen hübsche Einzelkonstruktionen gefunden, neue elegante Beweise gegeben werden, allein — wie uns das Beispiel jener trefflichen englischen Arbeiten zeigt — Alles, was neu produzirt wird, findet der Historiker in älteren Bearbeitungen vorweggenommen, und dafür, dass man an jede künftige Leistung diesen geschichtlichen Massstab anlegen kann, dient diese nunmehr ihrem Ende zueilende Zusammenstellung alles Bekannten wenigstens als Grundlage.

Eine wirklich neue Bahn für die Theorie der magischen Quadrate scheint nur durch die direkte Diskussion der für jedes solche Gebilde bestehenden unbestimmten Bedingungsgleichungen gebrochen werden zu können.

Einen glücklichen Schritt auf diesem Gebiete hat ganz kürzlich v. Pessl gethan. Wir haben schon in den ersten Paragraphen dieses Kapitels darauf hingedeutet, dass sowohl die Methoden der Inder, als auch die des Moschopulos nur dann befriedigend aufgefasst werden können, wenn man als das zu Konstruirende nicht sowohl das magische Quadrat als vielmehr die magische Kugel betrachtet. Was aber hier lediglich als Mittel zur bequemeren Veranschaulichung erschien, das sucht v. Pessl zum Selbstzweck der Untersuchung zu machen; von zahlentheoretischen Gesichtspunkten geleitet erweitert er das Problem der magischen Quadrate und studirt dasselbe mit den Hülfsmitteln der Topologie.

Wir beschränken uns auf ein kurzes Resumé. Eingangs seiner Abhandlung[123]) bemerkt der Verfasser, es sei seine Hauptabsicht, die bevorrechtete Stellung der Diagonalelemente aufzuheben. In der That, stellt man für das gewöhnliche Quadrat von n^2 Zellen die $(2n + 2)$ Bedingungsgleichungen auf, so kommt darin im Allgemeinen jeder Term zweimal vor, die Diagonalterme aber dreimal und, für ein ungerades n, die Mittelzahl sogar viermal. Um dieser Ungleichmässigkeit abzuhelfen, betrachtet v. Pessl den durch Seitenlinien und Parallelkreise in n^2 Felder getheilten magischen Cylindermantel; hierdurch treten an Stelle der Diagonalen zwei Schaaren von

123) *v. Pessl*, Ueber eine besondere Art magischer Quadrate, Amberg 1873. S. 3.

je n Schraubenlinien, deren jede n Felder durchsetzt. Dann gilt es folgende Aufgabe zu lösen:

Es sollen einem magischen Zylinder von n^2 Zellen die Zahlen von 0 bis $(n-1)$ so eingeschrieben werden, dass alle Zahlen, deren Zellenmittelpunkte der nämlichen Kante, Parallelkreis- oder Schraubenlinie angehören, die konstante Summe

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{2}$$

ergeben.

Die Kontinuitätsbetrachtungen, welche dieses Problem lösen, beziehen sich beim Verfasser zunächst auf $n = 5$; er lehrt jedoch das Resultat auf jede Primzahl ausdehnen. Von zwei Feldern sagt man, sie „bestreichen" sich gegenseitig, wenn man in horizontaler, vertikaler oder diagonaler Richtung zum einen vom andern gelangen kann. Dann gilt[124]) der Satz:

Bei einem magischen Zylinder von 25 Zellen haben zwei orthogonal oder diagonal zusammenhängende Felder zwei nicht bestrichene Felder gemein.

Der Verfasser hat diesen Satz nicht durch eine Figur erläutert, ohne welche doch seine Nothwendigkeit nicht sofort zu Tage tritt. Wir holen diess durch Fig. 26. nach; hier ist $MNPQ$ der magische Zylinder, welcher durch die Kantenlinien MQ, AA_5, BB_5, CC_5, DD_5 und die Parallelkreise $M_1A_1B_1C_1D_1$, $M_2A_2B_2C_2D_2$, $M_3A_3B_3C_3D_3$, $M_4A_4B_4C_4D_4$ in 25 kongruente Zellen getheilt ist*). Wir greifen zwei derselben, die etwa diagonal zusammenhängen mögen, heraus, nämlich $A_2B_2B_3A_3$ und MDD_1M_1. Konstruiren wir alsdann die drei in Frage kommenden Diagonalkurven

$$MD_1C_2B_3A_4Q, \quad DM_1A_2B_3C_4D_5, \quad DC_1B_2A_3M_4D_5,$$

so bemerkt man, dass von denjenigen Zellen, welche mit einer der beiden (schattirten) nicht ohnehin in der nämlichen Horizontal- oder Vertikalzeile gelegen sind, nur zwei von keiner jener Diagonallinien durchkreuzt werden, nämlich $B_4C_4C_5B_5$ und $D_3C_3C_4D_4$, welche wir, um sie kenntlicher zu machen, schraffirt haben. Hiemit ist der Satz, wenn auch nicht strenge

124) *Ibid.* S. 7.

bewiesen, so doch sehr wahrscheinlich gemacht. Ebenso sind die Vorbedingungen zur Lösung der vorbereitenden Aufgabe geschaffen:

„Man trage in ein beliebiges Feld die Null ein, so bilden die 8 *durch Null nicht bestrichenen Felder* 2 *Ketten von je* 4 *sich gegenseitig nicht bestreichenden oder durch einen Rösselsprung zusammenhängenden Feldern. Von diesen zwei Ketten besetze man die eine in beliebiger Permutation mit den Zahlen* 1, 2, 3, 4, *die andere mit den Zahlen* 2, 10, 15, 20. *Um die Anwendung zu vollenden, trage man jede aus je einem Felde der einen und der anderen Kette kombinirte Summe in dasjenige der noch übrigen* 16 *Felder ein, welches mit den beiden ersteren durch einen Rösselsprung zusammenhängt“.*

v. Pessl zeigt weiter, dass in ähnlicher Weise für jeden beliebigen magischen Zylinder mindestens Eine Lösung existire und deutet deren Charakter für eine Primzahl n an. Weitere Ausführungen verspricht er in einer künftigen Bearbeitung der Frage folgen zu lassen.

Jedenfalls ist mit dieser Verallgemeinerung ein bedeutender Schritt vorwärts gethan; es fragt sich nur und möge einstweilen der öffentlichen Diskussion aufbehalten bleiben, ob nicht mit Vortheil dem Zylinder eine allseitig gleichmässig zusammenhängende Fläche (die Kugel) zu substituiren sei.

Noten.

I. Zu §. 3. Dieterici (a. a. O.) nennt die den magischen Quadraten folgende Stelle, welche von Schachzügen handelt, unverständlich. Van der Linde dagegen glaubt den Sinn wenigstens theilweise verstehen zu können, und wir setzen deshalb die betreffenden Zeilen seines grossen Werkes[125]) hierher: „Herr Dieterici hatte die Güte, mir die Stelle nach seiner eigenhändigen Abschrift des Pariser Manuskriptes mitzutheilen, und ich lasse sie, in der Hoffnung, dass das fehlende arithmetische Schema noch einmal aufgefunden werde, im Original hier folgen.

Obgleich es leider nicht möglich ist, eine zusammenhängende Uebersetzung zu geben, so steht es doch fest, dass von Schach die Rede ist. Der unbekannte Verfasser beschreibt mittelst Schachzügen die Zahlen seines Formulars. Er nennt „das Haus des Pferdes“, „den Lauf des Fussgängers“, „den Gang des Vesiers“, „den Gang des Pferdes“. Eine Eigenthümlichkeit der so konstruirten Zahlenfigur nennt er, „dass alle Ecken

125) *Van der Linde*, Geschichte und Literatur des Schachspiels, 1. Band, Berlin 1874. S. 202.

geradzahlig und alle Mitten ungeradzahlig sind", und beschliesst dann: „Der Lauf darin ist der des Pferdes, dann der des Fussgängers, dann der des Vesiers zweimal, dann der des Fussgängers einmal, dann der des Pferdes noch einmal, dann der des Pferdes bis zur hohen Mitte"". Diess hängt offenbar mit magischen Quadraten zusammen; wie freilich, ist eine zur Zeit noch völlig offene Frage.

II. Zu §. 4. Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, dass die im fünften Paragraphen besprochene Gerhardt'sche Notiz, wofern sie auf unzweifelhaften Thatsachen beruht, das Alter desjenigen Moschopulos, welcher uns hier interessirt, ziemlich genau feststellt. Von den drei Planudes-Handschriften der Pariser Bibliothek, welche Gerhardt zu seiner Edition benutzte, enthalten die bezüglich dem 14. und 15. Jahrhundert angehörige erste und zweite lediglich den Text, die dritte, die ebenfalls aus dem 15. Jahrhundert stammt, nimmt aus dem Werke des Nicolaus Rhabda Einiges herüber. Mit diesem Mann lebte aber, den Eingangsworten zufolge, der fragliche Mathematiker zusammen, und so dürfen wir wohl mit grosser Wahrscheinlichkeit den Satz aussprechen:

Jener Moschopulos, welcher den Traktat über die magischen Quadrate verfasst hat, gehört dem grösseren Theile seiner Lebenszeit nach dem 15. Jahrhundert an.

III. Zu § 5. Wir geben in dieser Note die kritischen Noten zum Text des Moschopulos.

1) Das Komma fehlt im Kodex. 2) Spiritus lenis in ἀρταβάσδον fehlt. 3) Kod. hat Akut statt Gravis. 4) Kod. hat δύο. 5) Bei περιττοὶ fehlt Akzent. 6) Kod. hat πολλαπλισιασθεὶς mit nachfolgendem Kolon. 7) Kod. hat ἰσόπλευρον. 8) Kod. hat ἐφ' ἑαυτὸν. 9) Kod. hat ἰσόπευρος. 10) Kod. $\overset{\lambda}{\pi}'$. 11) Kod. hat πολλαπλασίασας. 12) Kod. hat ἁπᾶσ'. 13) Kod. $\overset{\nu}{\tau}$. 14) Kod. hat μὴ τεθῶσιν. 15) Kod. hat πανύτοι. 16) Kod. hat ῥαδύς. 17) Kod. hat ἔλπις. 18) Kod. hat βούλοιτοι. 19) Kod. hat ἀρτιοπερίττων. 20) Wir schliessen uns, wie diess bereits oben bemerkt wurde, bei Formen, die zwar dem klassischen Sprachgebrauche nach falsch, aber vom Autor offenbar mit vollem Bewusstsein gebraucht sind, an seine Schreibweise an; diess gilt u. a. auch für die Form ἔλθομεν, deren ε für uns unrichtig sein würde. 21) Kod. hat τὸν τρία. 22) Kod. hat ἐφ' zweimal. 23) Kod. hat συντιζέντες. 24) Kod. hat die Abkürzung $\overline{\rho\varphi}$, was eigentlich ἀριθμῶν heissen würde. 25) Kod. hat μέχρι οὗ. 26) Kod. hat ζήτηται. 27) Kod. hat ἥμυσι. 28) Kod. hat die Abreviatur $\overline{\eta}^{\nu}$. 29) Kod. hat τετραγωνησθῆναι. 30) Kod. hat, offenbar verschrieben, Τίθεσθαι. 31) Kod. hat καθ' εὐθείαν. 32) Kod. hat τὸν. 33) Kod. hat fälschlich $\overline{\gamma}$. 34) Kod. hat οὐκετι. 35) Kod. hat ἐξῆς. 36) Kod. hat ὥςἄν. 37) Kod. hat ἀφίγμενοι. 38) Kod. hat διὰ und am Rande die Verbesserung ἐπὶ, die im Texte akzeptirt wurde. 39) Kod. hat αὐτὴ. 40) Im Kod. scheint nicht οὐκ, wie es doch heissen muss, sondern οὐν (allerdings ohne Akzent) zu stehen. 41) Kod. hat παρέστι. 42) Kod. hat τόπον. 43) Kod. hat (abbrevirt) ἀριθμοῦ. 44) Kod. τετάρτη. 45) Kod. hat αὐτὸν. 46) Kod. hat ἀρηστερᾶς. 47) Kod. hat ἰσοπλευρὸν. 48) Kod. hat ἀριστερᾶς. 49)

Kod. hat *ἀριθμῶν*. 50) Kod. hat *ἐν*, was keinen Sinn giebt. 51) Kod. hat *ἔχοντα* $\overline{\Delta}$, was im Texte entsprechend geändert wurde. 52) Kod. hat *ὄγδος* für *ὄγδοος*. 53) Kod. hat *ὄκτω*. 54) Kod. hat blos *καὶ τον* $\overline{\iota\varepsilon}$; hier hat also offenbar von Seite des Kopisten eine Auslassung stattgefunden. 55) Kod. hat *ἔστιν*. 56) Kod. hat *ἐστὶν*. 57) Kod. hat *πέντε*. 58) Kod. hat das nothwendige *καὶ* nicht. 59) Kod. hat *τὸν*. 60) Kod. hat *ἓξ καὶ δέκατον*. 61) Kod. hat *ὁμοειδέσι*. 62) Kod. hat *τὸν δε τὸν τρόπον*. 63) Kod. hat *ἀναστράφω*. 64) Kod. hat das sinnlose *οὐτῆς*. 65) Kod. schreibt diese Worte zusammen. 66) Kod. schreibt ebenso *δεκαὲξ*. 67) Kod. hat *πολλαπλάσιον ἔστι*. 68) Kod. hat nach $\overline{\Delta}$ ein im Texte weggelassenes *καί*. 69) Kod. hat *τὸν τὸν τρόπον*. 70) Kod. hat *τοιτού*. 71) Kod. hat *σημειών τινων*. 72) Kod. hat *διαιρουθῆναι*. 73) Kod. hat *σημείον*. 74) Kod. hat *διαιρηθῆναι*. 75) Kod. hat *κατίειμεν*. 76) Kod. hat *θεσει*. 77) Kod. hat *τεσσάρας*. 78) Kod. schreibt dieses Wort in einer fast unleserlichen Weise.

⊙ Hier findet sich im Original, jedoch wie leicht zu sehen ist, auf einer radirten Stelle und mit anderer Tinte, die Abbreviatur

über welche wir keine Aufkläruug fanden.

☾ Eine ähnliche Abkürzung wie die eben genannte, nämlich diese:

Eine dritte Abbreviatur haben wir im Texte ganz übergangen, indem ohne sie derselbe bereits einen völlig bestimmten Sinn zu geben schien.

IV. Zu §. 10. Da uns im Vorstehenden ausschliesslich der reine wissenschaftliche Gesichtspunkt geleitet hat, so haben wir der Verwendung, welche die magischen Quadrate so vielfältig bei Amuleten, Talismanen, Münzen etc. fanden, nur ganz nebenbei gedenken wollen und können. Um jedoch auch in dieser Beziehung Anregung zur weiteren Forschung über eines der interessantesten Kapitel der Kulturgeschichte zu geben, tragen wir einige wichtigere Notizen hier nach.

Knorr v. Rosenroth liefert in seinem grossen Sammelwerke an verschiedenen Stellen[126]) die „*retia quadrata*“ oder „*kameae mirabiles*“ mit beziehungsweise 49, 36, 81, 64, 9, 16, 25 Feldern. Numismatisch interessant sind die Abbildungen, welche Claude du Molinet[127]) mittheilt; es sind goldene, silberne, zinnerne und kupferne Talismane mit Zauberquadraten als Aufschrift.

Auch der bekannte Kompilator Caspar Schott hat den magischen Quadraten in seiner „*Technica curiosa*“ eine eingehende Erörterung in diesem Sinne gewidmet, nachdem er in einem andern Werke (s. §. 17.) dieselben vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet hatte.

---

126) *Knorr von Rosenroth*, *Kabbala denudata*, Pars tertia et quarta, Sulzbaci 1677. S. 272, 305, 360, 443, 626, 677, 684. 127) *De Molinet*, *Le cabinet de la bibliothèque de Sainte Geneviève*, Paris 1692. Tafel 31 und 32.

V. Zu §. 26. Mollweide[128]) und Reuss*)[129]) setzen auch eine gewisse andere Problem-Gattung mit den magischen Quadraten in Beziehung. Diese Mathematiker haben Euler's berühmte Arbeit[131]) im Auge, in der er lehrt, wie man 9 Grössen A, B, C, D, E, F, G, H, J den 12 Bedingungen

$$A^2 + D^2 + G^2 = B^2 + E^2 + H^2 = C^2 + F^2 + J^2 = A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2 = G^2 + H^2 + J^2 = 1,$$

$$AB + DE + GH = AC + DF + GJ = BC + EF + HJ = AD + BE + CF = AG + BH + CJ = DG + EH + FJ = 0$$

entsprechend finden kann. Aber diese Aehnlichkeit ist eine rein äusserliche, wie man sofort aus folgender Ueberlegung entnimmt. Den Euler'schen Relationen, welche bekanntlich bei der Transformation der Koordinaten im Raume auftreten, wird im Allgemeinen durch trigonometrische Funktionen genügt, also durch Zahlgrössen, welche innerhalb bestimmter Grenzen alle möglichen reellen Werthe annehmen können. Charakteristisch für die magischen Quadrate ist dagegen gerade der Umstand, dass nur ganze Zahlen zugelassen werden. Euler's Problem gehört der Algebra resp. Determinantenlehre an, die magischen Quadrate der Zahlentheorie.

Zu §. 29. Eine ebenso schwierige als geistreiche Aufgabe hat sich ein Schachtheoretiker der neueren Zeit gestellt. Man war in der Behandlung des Rösselsprunges bereits so weit gekommen, dass man zweierlei Bedingungen zu erfüllen vermochte, nämlich erstens musste der Rösselsprung symmetrisch und zweitens musste er geschlossen sein (s. §. 6.). Jener Problemsteller nun, der anfangs anonym auftrat, später aber als den Bibliothekar Wenzelides von Nikolsburg sich zu erkennen gab, fügte die weitere Bedingung hinzu: Bezeichnet man jedes Feld, von einem Anfangsfeld 1 angerechnet, durch die um 1 erhöhte Zahl, welche angiebt, nach wievielen Sprüngen der Springer jenes Feld erreicht hat, so sollen diese Zahlen, horizontal oder vertikal summirt, gleiche Summen ergeben, d. h. (abgesehen von den Diagonalen) ein magisches Quadrat bilden. Theoretisch liess sich hiefür nichts bestimmen; es ist allerdings nicht schwer, für ein Brett von n^2 Feldern die n^2 Gleichungen aufzustellen, welche einen Rösselsprung repräsentiren, wenn bezüglich die $2n^2$ Koordinaten der Feldermitten als Unbekannte angesehen werden. Ebenso kann man die

*) Auch die von Reuss zitirte Abhandlung von F. C. Maier[130]) gehört in eine andere Kategorie, als in die „*Arithmetica Figurata*", wenn schon sie so betitelt ist; sie beschäftigt sich mit arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

128) *Mollweide*, Math. Wörterbuch. S. 45. 129) *Reuss*, Repertorium. S. 30. 130) *Maier*, *De arithmetica figurata ejusque usibus aliquot*, Comment. Acad. Petropol. Tom. III. S. 28 ff. 131) *Euler*, *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*, Novi Comment. Acad. Petropol. Tom. XV. S. 75 ff.

$\frac{n^2}{2}$ Gleichungen aufstellen, welche die Symmetrie bedingen. Die Verbindungslinie der beiden Punkte $a_{i,k}$ und $a_{n+1-i,n+1-k}$ muss eben durch den Mittelpunkt des Quadrates hindurchgehen. Völlig unmöglich aber erscheint es vorläufig noch, die Forderung von Wenzelides mathematisch einzukleiden; ja es musste fraglich erscheinen, ob diese Komplikation der Umstände überhaupt zulässig sei. Diese Frage ist thatsächlich im bejahenden Sinne entschieden; wir geben in Figur 27 den „Rösselsprung im Feiertagsgewande" nach Lange wieder[132]). Um die Symmetrie hervorzuheben, haben wir alle Verbindungslinien der Punkte 33 bis 64 gestrichelt; von 64 kann der Springer direkt auf 1 zurückgehen, wie es erfordert wird. Sämmtliche Kolonnen und Zeilen liefern die Summe 260.

---

132) *Lange*, Handbuch des Schachspiels, Halle 1856. S. 201.

Kapitel V.

Skizzen aus der Logarithmotechnie des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts.

§. 1. Nicht leicht existirt ein zweiter Gegenstand, der in den uns zu Gebote stehenden Darstellungen der geschichtlichen Entwickelung der Mathematik gleich stiefmütterlich behandelt wäre, wie die Lehre von den Logarithmen, insbesondere was deren praktischen Theil anbetrifft. Es wäre sonst nicht wohl denkbar, dass historische Irrthümer, die ihre Widerlegung und Berichtigung bereits vor mehr als hundert Jahren erfahren haben, immer wieder von neuem auftauchen, es wäre sonst auch unmöglich, dass interessante Arbeiten, die einen direkten Fortschritt der Wissenschaft involviren, vollständig in Vergessenheit gerathen konnten. Die Theorie der Logarithmen freilich, als mit den wichtigsten Problemen der Analysis im unmittelbaren Kontakt stehend, musste sich dem Historiker immer wieder zur Beachtung aufdrängen, und für sie existiren denn auch gute geschichtliche Spezialschriften, wie diejenigen von Wargentin[1]), Thibaut*)[2]) und Malfatti[3]), allein die sozusagen logistische Seite der Logarithmenlehre wartete vergeblich auf eine exakte monographische Behandlung. Drei Punkte schienen uns nun vor Allem einer Klarstellung zu bedürfen. Der eigentliche Charakter des Neper'schen Systemes, die von Jean Bernoulli erfundene vollständig unbekannt gebliebene Methode zur Bestimmung der Proportionaltheile und

*) Diese Schrift fehlt auffallenderweise bei Poggendorff.

1) *Wargentin, Om logarithmerna*, Vetensk. Acad. Handl. 1752. S. 3 ff.
2) *Thibaut, Dissertatio historiam controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos sistens*, Gottingae 1797. 3) *Malfatti, Sulla famosa questione de' logarithmi de' numeri negativi* in Memorie della reale Accademia delle scienze, In Mantova 1795.

schliesslich eine bereits in den Anfang des vorigen Jahrhunderts fallende Antizipation der Summen- und Differenzlogarithmen. Jedem dieser drei Punkte soll einer der folgenden Paragraphen gewidmet sein.

§. 2. Nicht sowohl historischer als vielmehr literargeschichtlicher Natur soll die Behandlung der ersten Materie sein; wir wollen zeigen, wie im Laufe der letzten 100 Jahre die Frage nach dem wahren Wesen des ersten logarithmischen Systemes immer nach einiger Zeit wieder als mathematische Seeschlange auftaucht. Den direkten Anstoss zu eigener Beschäftigung mit der Sache gaben uns die Arbeiten einiger Mathematiker der Jetztzeit.

Auch jetzt wird vielfach in Lehrbüchern und anderwärts das System Napier's von Merchiston in einem ganz falschen Lichte dargestellt, insoferne man es ohne weiteres mit dem natürlichen Systeme zusammenwirft. Wenn der alte Montucla von den Neper'schen Logarithmen sagt[4]): „*Ils ont leur usage dans les géométries transcendantes*; *car ils répresentent les aires de l'hyperbole équilatère entre les asymptotes, l'unité étant la valeur du carré inscrit; c'est pourquoi on les nomme hyperboliques*", so mag man ihm das zu Gute halten, allein wenn noch in allerneuester Zeit Geschichtschreiber der Mathematik, wie Hoefer, nichts weiteres als diese alten Irrthümer ihren Lesern bieten zu können glauben[5]), so ist es in der That hohe Zeit, dass dem entgegengetreten werde. So war es denn allerdings, wie nun einmal die Verhältnisse liegen, ein ganz verdienstliches Unternehmen, dass Wackerbarth[6]), gestützt auf die Quelle selbst, den wahren Sachverhalt mathematisch zu deduziren suchte.

Die Darstellung des Ersteren bedient sich der vereinfachenden Ausdrucksweise der Differentialrechnung und beweist so in eleganter Weise die Relation

$$\log_N u = 10^7 . \log_e \frac{10^7}{u},$$

wo $\log_N$ und $\log_e$ bezüglich Napier'sche und natürliche Lo-

4) *Montucla, Histoire des mathématiques*, Tome II., Paris 1758. S. 21. 5) *Hoefer, Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neufième siècle*, Paris 1874. S. 378. 6) *Wackerbarth, Logarithmes hyperboliques et logarithmes népériens*, Les Mondes, Tome XXVI., S. 626.

garithmen bedeuten. Aus dieser Formel folgt dann auch die charakteristische Eigenschaft der ersteren, mit grösser werdendem Numerus kleiner zu werden — eine Eigenschaft, die wohl allein vor jeder Verwechselung hätte bewahren müssen.

Diese Paraphrase Wackerbarth's ist unanfechtbar, und es ist schwer abzusehen, wie Dubois[7]) darauf verfallen konnte, mit unbegreiflicher Nonchalance ihre Richtigkeit in Abrede stellen zu wollen. Er bemerkt zwar selbst: „*Je n'ai pas sous les yeux le texte anglais des tables de sir Napier*" — gleichviel, er reproduzirt im Wesentlichen Wackerbarth's Rechnung, gelangt zu einer Schlussgleichung, die mit den von jenem angewandten Zeichen so geschrieben werden müsste

$$\log_N (a + x) = \frac{k}{h} \log_e \frac{a + x}{a},$$

und fährt dann[8]) fort: „*Mais Napier a supposé* $k = h$, *puisque à l'origine du temps les deux vitesses sont égales; et comme il a fait aussi* $a = 1$, *on a*

$$\log (1 + x) = \log (1 + x)$$".

Diess ist eben gerade nicht wahr, Napier hat über seine Konstanten in ganz anderer und zwar in der Weise verfügt, wie diess von Wackerbarth geschildert ist. Uebrigens hat auch ein Landsmann dieses letzteren das von ihm erlangte Resultat bestätigt*)[9]).

Bekannt freilich war dieses Resultat bereits vor sehr langer Zeit, und, streng genommen, hätte es nicht mehr der nochmaligen Diskussion einer Frage bedurft, die für den Ge-

*) Im hohen Grade frappirt hat uns die irrthümliche Auffassung des hier in Rede stehenden Gegenstandes, welche wir bei einem der ersten und gerade durch seine Geschichtskunde ausgezeichneten Mathematiker Englands, Augustus de Morgan, konstatiren mussten. Derselbe bemerkt von Gregorius a S. Vincentio[10]): „*Gregory St. Vincent is the greatest of circle-squarers, and his investigations led him into many truths: he found the property of the area of the hyperbola led to Napier's logarithms being called hyperbolic*". Bei dem stark entwickelten Lokalpatriotismus Grossbritanniens ist diese Verkennung auffällig zu nennen.

7) *Dubois, Logarithmes hyperboliques et népériens, Ibid.* Tome XXVII., S. 651. 8) *Ibid.* S. 651. 9) *D. G. Anmärkningar beträffende benämningen, naturlig, hyperbolsk, och Nepersk logaritm*, Tidskrift för Matematik och Fysik, IV. S. 28. 10) *De Morgan, A budget of paradoxes*, London 1872. S. 70.

schichtskundigen bereits für völlig abgeschlossen gelten durfte. Bereits im Jahre 1768 hatte ein namhafter deutscher Mathematiker, Wenceslaus Karsten, den Unterschied beider Systeme hervorgehoben[11]: „Die Neper'schen Logarithmen heissen bei den meisten mathematischen Schriftstellern auch die natürlichen Logarithmen, obgleich die letzteren mit jenen nicht so ganz völlig einerley sind". Er giebt zu, dass in Wahrheit die Aehnlichkeit eine beträchtliche sei, allein einiger Veränderungen bedürfe es, um vom einen zum anderen System überzugehen. „Vermöge dieser Veränderungen würde

$$l\,(1000000 : 10000000) = +\,1,$$

da dieser Logarithme beym Neper $= -\,1$ ist. Ueberdem aber dividirt man beyde Glieder dieses Verhältnisses durch 10000000, und behält übrigens die Voraussetzung bei, dass die Differenz der Glieder der Logarithme dieses Verhältnisses werde . . . Also ist in der That die *basis* der natürlichen Logarithmen von der *basi* der Neper'schen verschieden. Dasjenige Verhältniss, welches bei den Neper'schen die *basis* ist, wird bey den natürlichen Logarithmen der $\frac{1}{10000000}$ste Theil der *basis*."

Gegen diese Auffassung Karsten's hat Kästner eine Einwendung gemacht. Derselbe bestimmt zuerst den Unterschied zwischen beiden Formen durch eine Rechnung, welche mit derjenigen von Wackerbarth bis in's Detail übereinstimmt; er findet so[12])

$$\log \text{nat}\,\frac{y}{m} = -\,\frac{1}{m}\log \text{nep}\,x,$$

oder

$$\log \text{nep}\,x = -\,m\,(\log \text{nat}\,y - \log \text{nat}\,m) = m \log \text{nat}\,\frac{m}{y}.$$

Prinzipiell gelangt also Kästner zu dem nämlichen Ergebniss wie Karsten, hält aber dafür, dass letzterer in Napier's Darstellung eine grössere Genauigkeit suche, als dieselbe gewähren kann und will.

---

11) *Karsten,* Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2. Theil, Greifswald 1768. S. 194. 12) *Kästner,* Astronomische Abhandlungen zu weiterer Ausführung der astronomischen Anfangsgründe, 2. Sammlung, Göttingen 1774. S. 65.

Der strittige Punkt ist dieser. Karsten nimmt die Logarithmen in Napier's Tafeln als mathematisch genau nach der Ansicht des Erfinders den danebenstehenden Zahlen zugehörig an, während Kästner meint, es bestehe hier lediglich eine Näherung, wie bei den künstlichen Logarithmen. „Wenn man also auch" — sagt er[13]) — „die Basis, die Neper wirklich angenommen hat, wüsste, und nach derselben Logarithmen berechnete, so würde man doch vielleicht nicht völlig die herausbringen, die Neper in seine Tafeln gesetzt hat. Nimmt man aber eine Basis an, die nur der, die Neper angenommen hatte, ziemlich nahe kömmt, so kommen freylich die ersten Logarithmen, die man aus dieser Basis berechnet, den ersten neperischen auch nahe, aber daraus lässt sich nicht schliessen, dass man die von Neper'n angenommene Basis errathen hat". Um ganz genau entscheiden zu können, meint Kästner, müsse man in der supponirten geometrischen Progression ein sehr weit vom Anfang abstehendes Glied berechnen und zusehen, wie das mit Napier's Logarithmus stimmt.

Karsten gab später[14]) die Richtigkeit der Kästner'schen Einrede theilweise zu, glaubte aber an der von ihm für Napier's Basis ausgegebenen Zahl festhalten zu müssen. Indess hat Mollweide[15]) später dargethan, dass eigentlich keiner der beiden Mathematiker ganz im Rechte gewesen sei — Karsten nicht, indem die von ihm angenommene Basis doch nicht ganz die richtige sei, Kästner nicht, insofern er eine evidente Thatsache als noch zweifelhaft hingestellt habe. Mollweide accentuirt hiebei auch den von seinen Vorgängern scheinbar nicht klar erfassten Umstand, dass von einer Basis in dem uns jetzt geläufigen Sinne bei Napier gar keine Rede sein könne, dass er an eine solche überhaupt nicht gedacht habe. Man könne, wenn man denn einmal seinen Gedankengang in unsere Denkweise übertragen wolle, nur soviel festsetzen, dass seine Grundzahl $> 1{,}0000000 < 1{,}0000001$ zu nehmen sei, also etwa den Werth 1,00000005 des arithmetischen Mittels habe. Dass Kästner dieses Faktum nicht viel bestimmter habe hervortreten lassen, habe wohl darin seinen

13) *Ibid.* S. 72. 14) *Karsten*, Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2. Theil, Greifswald 1783. S. 240 ff. 15) *Mollweide*, Mathematisches Wörterbuch, erste Abtheilung, 3. Theil, Leipzig 1808. S. 539.

Grund, dass er seinen Ausgangspunkt nicht vom zweiten[16]), sondern lediglich vom ersten[17]) Werke des schottischen Gelehrten genommen habe.*) Uebrigens führt Mollweide den direkten Beweis für die Richtigkeit seiner Anschauungsweise; er verwendet nämlich die zu seiner Zeit bereits sehr verschärften Tabellen zur Berechnung jenes Termes der geometrischen Reihe, dessen Bestimmung Kästner für allzu komplizirt erachtet hatte, und weist die Nichtübereinstimmung mit Napier's Tafel nach.

Ungefähr um dieselbe Zeit, in der sich der hier skizzirte Streit abspielte, wurde die Frage nach dem Zusammenhang der Neper'schen und hyperbolischen Logarithmen auch von dem durch sein physikalisches Wörterbuch bekannter gewordenen Gehler einer gründlichen Revision unterzogen und in dem jetzt bekannten Sinne beantwortet[18]).

Wenn das Ausland von den bisher besprochenen Leistungen nicht die gebührende Notiz genommen, so wäre das am Ende wo nicht zu entschuldigen, so doch zu erklären, denn einmal waren es eben deutsche Arbeiten, die man ignoriren zu dürfen glaubte, und dann sind sie theilweise in schwer zu erlangenden Büchern niedergelegt. Allein was soll man dazu sagen, dass sogar die trefflich geschriebene und einer der ersten wissenschaftlichen Zeitschriften einverleibte Abhandlung Biot's ebenfalls gänzlich unbeachtet bleiben konnte. Bleiben wir noch einen Moment bei derselben stehen.

Biot bedauert in seinen Eingangsworten die Unkenntniss, in welcher sich im Allgemeinen die gelehrte Welt bezüglich der eigentlichen Leistungen Napier's befinde, er rügt mit

*) Diese Meinung Mollweide's hat viel für sich; denn in der That bemerkt Kästner selbst, dass er erst im Jahre 1798 jenes Werk erworben habe, und man kennt die eigenthümliche von ihm selbst oft erwähnte Grille jenes Mannes, nur solche Bücher eingehend zu lesen, welche sich in seinem Privatbesitze befanden.

16) *Napier*, *Mirifici ipsius canonis constructio et logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines*, Opus posthumum, Edinburgi 1619. 17) *Id*, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus in utraque trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio*, Edinburgi 1614. 18) *Gehler*, *Historia logarithmorum naturalium primordia*, Lipsiae 1776.

scharfen Worten Montucla's Verfahren[19]) — „*Pour Montucla, l'historien vulgaire des mathématiques, on serait presque tenté de croire qu'il n'a pas eu entre les mains l'ouvrage posthume et explicatif de Napier*" — und bricht dann auch den Stab über den im Allgemeinen von ihm höher geschätzten Delambre. Uns scheint allerdings die so ganz unhistorische Marotte des letzteren, alles was seit Jahrtausenden an mathematischer Forschung produzirt war, in die stereotype Zwangsjacke eines durch und durch modernen Formalismus stecken zu wollen*), einen noch viel herberen Tadel zu verdienen als die Oberflächlichkeit des doch immer genialen ersten Geschichtsschreibers der Mathematik. Dann stellt Biot weiterhin Napier's Methode in geistreicher Weise mit dem von Archimedes in seinem *Arenarius* angewandten Verfahren in Parallele, konstruirt so[21]) das ursprüngliche Schema des ersteren und bemerkt, dass man mit den von Archimedes aufgefundenen Eigenschaften einer geometrischen Progression — man vergleiche die vorzügliche Darstellung dieser Eigenschaften bei Nesselmann[22]) — auch hier vollkommen ausreichen könne.

Von besonderem Interesse für uns jedoch ist nachstehender, freilich von Mollweide (s. o.) gewissermassen antizipirter Passus[23]): „*Il montre que le logarithme du premier tome* 9999999 *est nécessairement compris entre* 1,0000000 *et* 1,0000001, *de sorte qu'il le prend égal à* 1,00000005; *or, la valeur exacte de ce logarithme, calculée par nos méthodes actuelles, est* 1,0000000500003333, *de sorte que l'évaluation de Napier est seulement en erreur d'un tiers d'unité sur le quatorzième décimale de ce logarithme*". Hier ist also mit klaren Worten ausgesprochen, dass die Basis des natürlichen mit der des Neper'schen Systemes nicht identisch sei, und auf diesen Unterschied wird auch noch an einer anderen Stelle[24]) die Aufmerksamkeit des Lesers hingelenkt: Biot erzählt nämlich, dass er den hyperbolischen Logarithmus

*) Von dieser verkehrten Manier Delambre's führt auch Chasles[20]) ein recht drastisches Beispiel an.

19) *Biot*, Rezension über: *Memoirs of John Napier of Merchiston*, Journal des savants, Année 1835. S. 259. 20) *Chasles*, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohnke, Halle 1839. S. 652. 21) *Biot*, S. 265. 22) *Nesselmann*, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. S. 122 ff. 23) *Biot*, S. 266. 24) *Ibid.* S. 269.

der Zahl 10 „*d'après les nombres de Napier corrigés*“ gesucht und ihn sehr nahe mit dem durch unsere jetzt vorliegenden Tafeln zu erhaltenden übereinstimmend gefunden habn.

In Deutschland scheint man dem auch in manchen anderen Stücken überaus anregend geschriebenen Artikel wenig Beachtung geschenkt zu haben; jedoch hat Bernhardt die Biot'schen Resultate in seinem eigenen Schriftchen über die Urgeschichte der Logarithmen[25]) mit verarbeitet.

Hoffentlich wird dieser historische Rückblick dazu beitragen, ein abermaliges Aufwärmen der längst entschiedenen Frage nach der Identität der ältesten und der aus analytischen Gründen erst später betrachteten Logarithmen unmöglich zu machen; zusammenfassend sagen wir:

„*Der Unterschied zwischen den Neper'schen und den natürlichen Logarithmen ist ein prinzipieller und ein praktischer — ein prinzipieller, insoferne Napier den Begriff einer Basis überhaupt nicht kannte, ein praktischer, insoferne diejenige Basis, welche unbewusst seinem Systeme zu Grunde liegt, nicht mit der Zahl* $e = 2{,}78\ldots$ *übereinstimmt.*

§. 2. Der Umstand, dass keine logarithmische Tabelle über ein gewisses Mass von Annäherung hinauszugehen vermochte, machte schon auf einem sehr frühen Standpunkte der Logarithmotechnie eine Hülfstafel nöthig, bestimmt zur Ersparung der an sich erforderlichen Proportionsrechnung. Der Grundgedanke dieser Einrichtung ist dieser: Man will in der Tabelle $\log a$ aufschlagen, findet jedoch darin nur $\log b$ und $\log c$ bezüglich $\gtrless \log a$. Dann gilt der *regula falsi* zufolge näherungsweise die Proportion

$$(b - c) : (a - c) = (\log b - \log c) : (\log a - \log c),$$

und so findet man die noch zu addirende Grösse. Möglichst grosser Erleichterung halber wird nun in einer besonderen Spalte zwischen $\log b$ und $\log c$ auch die Differenz $(\log b - \log c)$ mitgeführt, und da die Differenz $(a - c)$ immer einer ganzen Zahl innerhalb eines gewissen Intervalles $(1 - 10)$ gleich sein muss, so bildet man gleich im Voraus die sämmtlichen Quotienten

$$\frac{(\log b - \log c)\ n}{b - c},$$

25) *Bernhardt*, Die Neper'schen Logarithmen, Wittenberg 1842.

unter n jede ganze Zahl jenes Intervalles verstanden, und schreibt die Ganzen des Resultates ebenfalls bei, in den vollständigen Tafeln der Neuzeit wohl auch die ersten Dezimalen. Diese Proportionaltheile scheinen nach Kästner[26]) zuerst in der von Pezenas besorgten Ausgabe der Gardiner'schen Sammlung[27]) vorzukommen.

Im Allgemeinen können nun solche „*partes proportionales*" bei jeder ausgedehnteren Zusammenstellung numerischer Werthe Dienste leisten, und man musste auf brauchbare Methoden zu ihrer Berechnung bedacht sein. In diesem Sinne hatte Jean Bernoulli*) bereits im Jahre 1770 die Idee einer dahin zielenden Rechnung gefasst und auch einige zahlentheoretische Aufsätze[28]) erscheinen lassen, das folgende Jahr brachte eine ausführliche Darstellung[29]) seines Verfahrens, mit welcher wir uns hier zu beschäftigen haben werden. Die Zeitgenossen haben indess anscheinend keine Notiz davon genommen, selbst das Klügel-Mollweide'sche Lexikon schweigt darüber, und die einzige Erwähnung der Methode fanden wir in der von Kausler[30]) besorgten deutschen Ausgabe der Euler'schen Algebra. Für neuere Historiker gilt das Gleiche; nur Favaro[31]) in seiner Geschichte der Kettenbrüche nennt wenigstens den Titel, und in der That sind es, wie wir sehen werden, gerade die Kettenbrüche, welche den eigenthümlichen Charakter jener Rechnungsweise bedingen.

In jedem Falle ist der Proportionaltheil gleich einem Bruch,

*) Genealogisch gewöhnlich mit Ziffer III bezeichnet.

26) *Kästner*, Astr. Abhandl. 2. Theil. S. 19. 27) *Tables de Logarithmes des nombres depuis* 1 *jusqu' à* 102100, *et les logarithmes des Sinus et des Tangentes de* 10 *en* 10 *Secondes pour chaque degré du quart de cercle, avec différentes autres Tables. Publiées ci devant en Angleterre par Monsieur Gardiner*, Nouvelle édition. A Avignon 1770. 28) *Bernoulli, Sur les fractions décimales périodiques*, Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin, Année 1771. S. 273 ff. *Id. Recherches sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique:* $1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \cdots 10^T = S$, ibid. S. 318 ff. 29) *Id. Recueil pour les Astronomes*, Tome I., A Berlin 1771. S. 255 ff. 30) *Leonhard Euler's* vollständige Anleitung zur Algebra, deutsch von Kausler, 3. Theil, Frankfurt a. M. 1796. S. 54. 31) *Favaro, Notizie storiche sulle frazioni continue dal sccolo decimoterzo al decimosettimo*, Boncomp. Bullet., Tomo VII. S. 588.

dessen Zähler als Produkt aus zwei Faktoren sich darstellt; der eine Faktor (oben $\log b - \log c$) ist konstant und wird von Bernoulli mit m bezeichnet. Der Nenner $(b - c)$ heisst hier[32]) c, die alle ganzzahligen Werthe eines Bezirkes sukzessive erreichende Zahl wird, wie oben, n genannt. Um nun die Tabelle der Proportionaltheile herzustellen, müsste die Regeldetri fortwährend angewandt werden, allein diess will eben Bernoulli nicht. *„Cette méthode cependant sera encore ou bien longue ou peu sûre, à cause de la condition qu'on s'est imposée de ne jamais négliger plus que la moitié de l'unité du dernier chiffre; or la Méthode dont je me propose de rendre compte, satisfait exactement à cette condition, et quelque soit le nombre de n, on n'a besoin de faire, pour une valeur donnée de m, qu'une seule règle de trois; tous les autres termes se déterminant par de simples additions, au moyen de certaines formules générales que j'ai trouvées“*[33]).

Es sei, wenn P nur ganzzahlig sein darf,

$$P = \frac{mn}{c}.$$

Nun lasse man n alle die dafür bestimmten Werthe nacheinander annehmen und sehe zu, wie sich — mit Beiseitesetzung aller Bruchtheile — der sonach als Funktion von n erscheinende Werth von P ändert. Ist z. B. $\frac{m}{c} = \frac{7}{20}\left(< \frac{1}{2}\right)$, so sei eben $P \equiv P$ für $n = 1$; für $n = 2$ hat man $\frac{14}{20} > \frac{1}{2}$, also ist jetzt P in $(P + 1)$ übergegangen, welcher Werth sich für $n = 2$ und $n = 3$ nicht ändert, denn es ist sowohl $\frac{21}{20}$ als auch $\frac{28}{20} < 1\frac{1}{2}$; für $n = 5$ dagegen wird $\frac{mn}{c} = \frac{35}{20} > 1\frac{1}{2}$, also muss $(P + 2)$ genommen werden. Diese Relationen müssen nun[34]) allgemein gefasst werden.

Es sei also

$$\frac{m}{c} = x + \frac{a}{c} = x + \frac{h}{k},$$

unter h und k relative Primzahlen verstanden; dann lässt sich zeigen, dass zu $(n + l)$ und $(n + k + l)$, unter l eine beliebige ganze Zahl verstanden, die nämliche Zahl $P + y$ gehört.

32) *Bernoulli*, S. 256. 33) *Ibid.* S. 257. 34) *Ibid.* S. 261.

Wenden wir die in neuester Zeit der Zahlentheorie geläufig gewordene Bezeichnung an, so können wir diese Thatsache so ausdrücken:

$$\left(\frac{m(n+l)}{c}\right) = \left(\frac{m(n+k+l)}{c}\right).$$

Dann erhebt sich die weitere Frage[34]: „*Où les périodes doivent-elles commencer? c'est à dire pour quelle valeur de n doit-on faire la règle de trois, afin de déterminer le terme* $P = \frac{mn}{c}$, *du quel on veut partir?*“ Diese Frage beantwortet Bernoulli mit zwei Theoremen, die auch an sich interessant sind:

I. *Ist k gerade, also h ungerade, so beginnt die Periode beim Werthe*

$$n = \frac{2rk + k + 2(h+1)}{2h};$$

r ist die kleinste ganze Zahl, welche auch den Ausdruck

$$\frac{2rk + k + 2}{2h} = M$$

ganzzahlig macht.

II. *Ist k ungerade, also h gerade, so beginnt die Periode beim Werthe*

$$n = \frac{2rk + k + 2h + 1}{2h};$$

r ist die kleinste Zahl, welche auch den Ausdruck

$$\frac{2rk + k + 1}{2h} = N$$

ganzzahlig macht.

Um nun diese Zahl r in jedem der beiden Fälle zu finden, hat man lediglich eine diophantische Gleichung vom ersten Grade mit zwei Unbekannten aufzulösen, und diese Auflösung wird in der ursprünglich von den Indern[35]) herrührenden, aber von Lagrange wieder erfundenen[36]) Weise durch Kettenbrüche vollzogen[37]), die zu jener Zeit noch sehr wenig Verbreitung gefunden hatten.

---

35) *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 197. 36) *Lagrange, Nouvelle Méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers,* Hist. de l'acad. de Berlin, Année 1768. S. 181 ff. 37) *Bernoulli*, S. 263 ff.

Natürlich ist es nicht nothwendig, diese Betrachtung stets *in extenso* durchzuführen, vielmehr zieht man sich daraus eine praktische Regel, die sich folgendermassen formuliren lassen wird:

Es sei

$$\frac{m}{c} = x + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\alpha_k} + \cdots + \frac{1}{\alpha_t}$$

Dann soll in rekurrirender Weise bestimmt werden, wie oftmal die letzten Ziffern der Zahlen P um x und $(x + 1)$ *vermehrt werden müssen. Es sei folgendes bekannt: Würde der obige Kettenbruch beim Theilnenner* α_{k-1} *abbrechen, so müsste eine bestimmte Reihe von im Ganzen* φ_{k-1} *Vermehrungen eintreten. Alsdann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem* $(k - 1)$ *eine gerade oder ungerade Zahl ist. Der erste Summand entspricht x, der zweite* $(x + 1)$.

I. $(k - 1)$ *ist gerade. Um dann die Anzahl der Vermehrungen* φ_k *zu bilden, welche zu* α_k *gehören, nehme man die Anzahl* $\varphi_{k-2}\alpha_{k-1}$ *mal und füge diejenige Anzahl von Vermehrungen von* φ_{k-1} *hinzu, welche in* φ_{k-2} *nicht* $(\alpha_{k-2} - 1)$ *mal genommen werden, hiezu tritt dann noch* $\varphi_{k-1}(\alpha_k - 1)$ *mal genommen.*

II. $(k - 1)$ *ist ungerade. Um* φ_k *zu bilden, nehme man* $\varphi_{k-1}(k - 1)$ *mal; hiezu kommt noch* φ_{k-1} *selbst nur mit dem Unterschiede, dass dessen zweiter Theil nicht* $(\alpha_{k-1} - 1)$ *mal, sondern* α_{k-1} *mal genommen wird.*

Wir fühlen wohl, wie schwer es ist, die an sich einfache Regel allgemein auszusprechen, und man mag sich demgemäss vorstellen, wie schwer es Bernoulli, der noch nicht über die Indexbezeichnung verfügte, geworden ist, dieselbe anders als in Tabellenform präzise hinzustellen. Gestatten wir uns jedoch eine symbolische Darstellung, indem wir den Vorgang des $n$maligen Nehmens einer Grösse durch das Produkt dieser Grösse in n ausdrücken, so gewinnen wir leicht ein übersichtliches Bild. Wir haben dann folgende beide Regeln:

I. *Für ein gerades k ist*

$$\varphi_{k-1} = M + (\alpha_{k-1} - 1)N,$$
$$\varphi_k = (\alpha_k - 1)\varphi_{k-1} + M + \alpha_{k-1}N.$$

II. *Für ein ungerades k ist*

$$\varphi_{k-1} = m + (\alpha_{k-1} - 1)n$$

$$\varphi_k = (\alpha_k - 1)\varphi_{k-1} + m + \alpha_{k-1}n.$$

Das eigentliche Bildungsgesetz ist sonach für gerade und ungerade Indices das gleiche, und der ganze Unterschied besteht in der etwas verschiedenen Zusammensetzung der Theile M und N, beziehungsweise m und n, in welche jedes φ_k sich zerfällen lässt. Auch Bernoulli hat dieses rekurrente Bildungsmittel der einzelnen φ angegeben[37]), indess glauben wir, dass es in den obigen Formeln klarer als bei ihm hervortritt.

Eine Reihe von Beispielen thun die allerdings sehr erfolgreiche Verwendbarkeit der anscheinend so abstrakt gefassten Vorschrift zur Genüge dar, und jedenfalls geht aus unserer Skizze klar hervor, dass der sonst mehr als Astronom denn als reiner Mathematiker genannte Bernoulli in der Geschichte der Logarithmotechnie sowohl als auch der Kettenbruchlehre mit Ehren genannt zu werden verdient.

§. 4. Dass die sogenannten Gauss'schen Summen- und Differenzlogarithmen nicht ganz mit Recht diesen Namen tragen, ist längst zugegeben. Gauss selbst[38]) schreibt die Konzeption der ersten Idee dem Physiker Leonelli zu, und in der That hat derselbe ein ausführliches Werk über diesen und verwandte Gegenstände geschrieben[39]). Auch später suchte er sich die Priorität der Erfindung zu wahren[40]), jedoch war, wie Gauss[41]) hervorhebt, die von ihm vorgeschlagene Einrichtung der Tabellen viel zu wenig praktisch, um allgemeineren Eingang zu finden. Durch Bekanntgebung des Briefwechsels, welchen im Jahre 1789 der junge Alexander v. Humboldt mit seinem ehemaligen Mathematiklehrer Pfaff führte, haben wir auch vor Kurzem erst erfahren, dass dieser in der Geschichte der reinen Mathematik sonst wenig genannte Mann über das Deside-

37) *Bernoulli*, S. 263 ff. 38) *Gauss*, Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Monatl. Corresp. znr Beförd. d. Erd- und Himmels-Kunde, 26. Band. S. 498. 39) *Leonelli, Supplément logarithmique, contenant: la décomposition des grandeurs numériques quelconques en facteurs finis, et la théorie des logarithmes additionels et déductifs*, Bordeaux 1802. 40) *Id., Invention et Tables de logarithmes additionels et déductifs*, Compt. rend. de l'acad. des sciences, XIII, 1841. 41) *Gauss*, S. 499.

ratum der Logarithmenlehre ganz gesunde Ansichten hegte[42]). Er glaubte sogar zweierlei Wege gefunden zu haben, auf welchen sich dasselbe abstellen liesse. Bruhns[43]) bemerkt darüber: „Hätte Humboldt seine erste Methode weiter verfolgt, so würden daraus möglicherweise die später nach Gauss genannten Logarithmen entstanden sein; er gab sie aber, ihren Werth nicht erkennend, auf, indem er sie unanwendbar und mangelhaft nennt. Nach der zweiten Methode zerlegt er jede Zahl in zwei Faktoren, wovon der eine für alle Zahlen derselbe ist und der Grundfaktor genannt wird. Die arithmetischen Operationen mit solchen Produkten sind den Operationen mit gewöhnlichen Zahlen so vollständig gleich, dass durch die Zerlegung der Zahlen in Faktoren, selbst mittelst Tafeln, keine Erleichterung eintritt, was Humboldt, nach Rücksprache mit Pfaff, wohl auch erkannt haben mag. . . . Hier sollte nur als bemerkenswerth angeführt werden, wie der zwanzigjährige Jüngling auf ein Bedürfniss im numerisehen Rechnen aufmerksam wurde, ja der später erfolgten Lösung sich schon ziemlich nahe befand". Wir wollen nun den Nachweis führen, dass dieses Bedürfniss schon weit früher, an der Scheide des vorangehenden Jahrhunderts, fühlbar geworden und von verschiedenen Mathematikern zum Gegenstande eingehender Untersuchung gemacht war, ohne dass freilich in praktischer Beziehung eine wirkliche Vorwegnehmung der Gauss'schen Tabellen aufzufinden wäre.

Der erste Name, welcher uns hier entgegentritt, ist der eines im Uebrigen ganz verschollenen Gelehrten, Joseph Muschel v. Moschau. Näheres über den Mann anzugeben sind wir nicht in der Lage, Poggendorff nennt ihn nicht, und das Mitgliederverzeichniss der gelehrten Gesellschaft, in deren Memoiren er seine literarischen Erzeugnisse niederlegte, bezeichnet ihn einfach als Stadtarzt von Glatz. Es muss demnach wohl genauere Aufklärung über diese anscheinend gar nicht uninteressante Persönlichkeit der jetzt mit so grossem Eifer kultivirten schlesischen Provinzialgeschichte überlassen bleiben.

---

42) *C. H. Pfaff*, Johann Friedrich Pfaff's Briefwechsel, Leipzig 1853. S. 233. 43) *Bruhns*, Alexander v. Humboldt. Eine wissenschaftliche Biographie, 3. Band, Leipzig 1872. S. 6.

Muschel's Abhandlung[44]) trägt die Ueberschrift: *„Methodus Additionis et Subtractionis Logarithmorum"*, und charakteristisch für seinen Zweck sind auch die Eingangsworte: *„Hactenus sola multiplicatio et divisio per logarithmos peracta est, ego vero curioso lectori propono methodum, qua mediante etiam additio et subtractio logarithmorum perfici queat"*. Die Methode selbst lehnt sich durchweg an geometrische Betrachtungen an, wie diess auch noch bei späteren Geometern sehr oft der Fall ist*), die bei allen mit Logarithmen zusammenhängenden Fragen entweder auf die Hyperbel oder auf die sogenannte „Logistik" zurückzukommen pflegen.

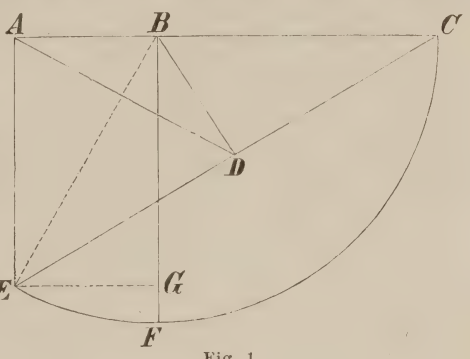


Fig. 1.

Hier jedoch gestaltet sich die Sache einfacher. Ist gegeben $\log a$ und $\log b$, gesucht $\log (a+b)$, so mache man nach irgend einem Massstabe AB (Fig. 1.) $= a$, $BC = b$, errichte hierauf senkrecht AE und BF und beschreibe um B als Mittelpunkt mit BC als Halbmesser einen Kreis, der die Lothe bezüglich in F und E schneidet; dann werde EC gezogen und in D halbirt. Zieht man $EB = BC$, so ist

$$\sin \alpha = \sin EBF = \frac{EG}{EB} = \frac{a}{b},$$

$$\sphericalangle ECB = \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2},$$

$$EC = 2b \cos \beta,$$

*) Wir verweisen in diser Hinsicht besonders auf Kramp[45]), der selbst in den neunziger Jahren noch sich nicht emanzipirt hat und bei seinen Untersuchungen über die Strahlenbrechung, wo so vielfach Logarithmen auftraten, stets von der Subtangente der logistischen Linie u. dgl. redet.

44) *J. Muschel de Moschau, Methodus Additionis et Subtractionis logarithmorum*, Miscell. Cur. Academ. Caes.-Leopold. Dec. III., Annus IV. S. 102 ff. 45) Schreiben von *Kramp* an *Hindenburg*, Archiv d. reinen u. angew. Mathematik. 2. Band. S. 509.

also durch Logarithmirung

$$\log AC = \log(a + b) = \log EC + \log\cos\beta = \log 2 + \log b + 2\log\cos\beta.$$

Recht prägnant zeigt sich der eminente Fortschritt der mathematischen Ausdrucksweise, wenn wir mit dieser übersichtlichen Formulirung Muschel's uns jetzt fast unverständliche Darstellung[46]) vergleichen: „*Logarithmo minori praefigatur unum, et postea ex eo subtrahatur logarithmus major, residuum est logarithmus Sinûs alicujus arcûs, cujus arcûs dimidium addatur ad gradus quadraginta quinque, summa est arcus, cujus logarithmus Sinûs bis sumptus addatur ad logarithmum datum majorem, et ad logarithmum numerum binarii, ex summa detracto numero binario à sinistris, remanet logarithmus Summae quaesitae*". Die Eruirung des Hülfswinkels β ist hier offenbar nicht deutlich dargelegt.

Was nun die Bestimmung von $\log(a - b)$ anlangt, so vollzieht sich dieselbe ganz analog — nur werden die beiden Strecken a und b nicht in entgegengesetzter, sondern gleicher Richtung von B aus aufgetragen. Muschel rühmt dann noch seiner Methode nach[47]), man könne mit ihrer Hülfe die geozentrischen Planetenörter sehr leicht berechnen, und überhaupt sei sie zur leichteren Behandlung vieler Probleme der angewandten Mathematik vom höchsten Nutzen.

Sehr grossen Beifall scheint indess diese trigonometrische Methode bei den Zeitgenossen nicht gefunden zu haben, und in der That windet sie sich noch durch zu viele Zwischenrechnungen hindurch, um bequem genannt werden zu können. Christian Wolf wirft ihr deshalb nicht mit Unrecht diese Umständlichkeit vor[48]): „*cum fundamentum ejus non satis obviam sit, difficulter memoria retinetur, nec commoda videtur, quae in usum communem recipiatur*". Er giebt also eine neue und einfachere an, bemerkt aber selbst, dass dieselbe theilweise auf Hermann (den Verfasser der Phoronomia) als Urheber zurückgeleitet werden müsse.

---

46) *Muschel*, S. 103. 47) *Ibid.* S. 105. 48) *Wolf*, *Regula nova inveniendi logarithmum Summae vel differentiae duorum numerorum sive rationalium, sive irrationalium, tam integrorum, quam fractorum, itemque potentiarum earundem sive similium, sive dissimilium*, Acta Eruditor. Lipsiae MDCCXV. S. 258.

Man betrachte, wenn wiederum $\log(a+b)$ zu bestimmen ist, $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks; alsdann ist die Hypotenuse $c = \sqrt{a+b}$. Ist dann α der dem $\sqrt{a}$ gegenüberliegende spitze Winkel, so ist ($a > b$ vorausgesetzt),

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

und

$$\log\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{2}(\log a - \log b).$$

Hieraus wird α entnommen und dann gilt die Gleichung

$$\log c = \tfrac{1}{2}\log a - \log\sin\alpha,$$
$$\log(a+b) = \log a - 2\log\sin\alpha.$$

Sollte statt der Summe $(a+b)$ der komplizirtere Ausdruck $(a^m + b^n)$ vorliegen, so würde die Rechnung wesentlich dieselbe bleiben.

Siebenzig Jahre später (also ungefähr um die nämliche Zeit wie Humboldt) nahm Delambre die Sache von Neuem auf. Er setzt[49]), um $\log(a+b)$ zu finden,

$$a + b = b\left(\frac{a}{b} + 1\right),\quad \frac{a}{b} = \sec x,$$

dann wird

$$a + b = b(\sec x + 1) = b\operatorname{tg} x\cot\frac{x}{2}\ ^*),$$

oder schliesslich

$$\log(a+b) = \log b + \log\operatorname{tg} x + \log\cot\frac{x}{2}.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn die nämliche Substitution angewandt wird,

$$\log(a-b) = \log b + \log\operatorname{tg} x + \log\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Die ganze Betrachtung dient nur zur Erleichterung der folgenden Parallaxenrechnungen[50]).

*) Im Original heisst es irrigerweise $\cos x$ anstatt $\cot x$.

49) *Delambre*, Ueber die Berechnung der Parallaxe, D. k. schwed. Akad. d. Wiss. neue Abhandl. aus der Naturlehre, Haushaltungskunst u. Mechanik, deutsch v. *Kästner* und *Brandis*, 9. Band, 1. Hälfte. S. 77. 50) *Ibid.* S. 79.

Woran lag es nun, dass die Vorschläge von Muschel, Wolf und Delambre sich nicht über das Niveau der Alltäglichkeit zu erheben vermochten, welches ist der eigentliche Unterschied zwischen ihren Leistungen und denjenigen von Leonelli-Gauss? Doch offenbar nur der, dass diese Männer die von Humboldt bereits gehegte Idee der tabellarischen Zusammenstellung realisirten. Dabei darf man sich durchaus nicht durch den Umstand beirren lassen, dass die äussere Einkleidung bei jenen früheren Gelehrten eine goniometrische ist, bei Gauss aber dieses Beiwerk abgestreift hat. Sagt er doch selbst bei Erklärung des von ihm gewählten Arrangements[51]): „Man kann also auch die Zahlen der drey Columnen als die doppelten Logarithmen der Tangenten, Cosekanten und Sekanten der Winkel von 45^0 bis 90^0 betrachten". Kurz, Allem in Allem, wird man uns nicht Unrecht geben können, wenn wir sagen:

So hoch auch die Neuerung zu schätzen ist, welche wir in der durch Gauss bewirkten tabellarischen Anordnung der Werthe

$$1 + \frac{b}{a}$$

erblicken müssen, so war der endgültigen Durchführung derselben doch durch die trigonometrischen Methoden verschiedener Schriftsteller des achtzehnten Jahrhunderts entschieden vorgearbeitet worden.

Noten.

Zu §. 2. Biot hat sich noch ferner die dankbare Aufgabe gestellt, den ganzen Gedankengang des Erfinders der Logarithmen nochmals durchzumachen, nur ausgerüstet mit den vollkommeneren Hülfsmitteln der modernen Analysis. Sein Verfahren kann natürlich prinzipiell kein anderes sein als das von Kästner und Wackerbarth angewandte; nur bedient er sich nicht der abkürzenden Bezeichnung des Differentialkalküls, sondern entwickelt in unendlichen Reihen. Bleibt man bei der phoronomischen Einkleidung Napier's stehen und setzt den Weg, welchen das mit gleichförmiger Geschwindigkeit begabte Mobil zurückgelegt hat, $= x$, den des anderen $= y$, so gilt die sofort verständliche Relation[52])

$$A = \frac{x}{na} = \frac{y}{1 + (1 - a)^n},$$

51) *Gauss*, S. 500. 52) *Biot*, *Analyse et restitution de l'ouvrage original de Napier, intitulé: Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Journal de Savants, Année 1835. S. 355.

und nach dem binomischen Lehrsatz

$$y = A\left(\frac{x}{A} - \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2 A^2} + \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3 A^3} - \binom{n}{4}\frac{x^4}{n^4 A^4} + - \cdots\right).$$

Damit dann x in den Neper'schen Logarithmen von $(A - y)$ übergehe, muss n unendlich gross genommen werden; setzt man also allgemein

$$\frac{\binom{n}{p}}{n^p A^p} = \frac{1}{A^p p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right),$$

so transformirt sich, unter der Voraussetzung $n = \infty$, die obige Reihe in die nachstehende:

$$y = A\left(\frac{x}{A} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{A}\right)^3 - \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{A}\right)^4 + - \cdots\right),$$

oder, da bekanntlich diese Reihe die Exponentialreihe ist,

$$N = A - y = A e^{-\frac{x}{A}}.$$

Wie aber $(A - y)$ und x bei Napier zusammenhängen, wissen wir bereits; wir können die letzte Gleichung also auch so umschreiben:

$$\log \text{hyp}\,\frac{N}{A} = -\frac{1}{A}\log \text{nep}\, N,$$

und in diese Beziehung muss dann noch der numerische Werth von A eingesetzt werden; für denselben ward oben bereits die Zahl 10^7 gefunden.

Auf die weiteren Bemerkungen Biot's können wir, so interessant sie auch an sich sind, hier nicht näher eingehen, da sie zu unserer Kardinalfrage keine direkte Beziehung haben.

II. Zu §. 3. Jean Bernoulli zeigt sich auch bei einer anderen Gelegenheit mit den Fortschritten wohl vertraut, welche die Theorie der Kettenbrüche zu seiner Zeit, hauptsächlich unter den Händen eines Euler und Lagrange, machte; die betreffende Stelle scheint uns auch deshalb einer Aufzeichnung werth, weil sie die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf ein anscheinend vergessenes Werk und zugleich auf einen wenig bekannten Schriftsteller[53]), den Engländer Ludlam, lenkt. Bernoulli berichtet[54]): „*Le dernier article de cette seconde partie concerne la construction et la force des lunettes à plusieurs oculaires. Le procédé de M. L. pour cette construction est fondé sur la même Théorie que celle que M. Euler employe Tome XIII. p. 283 des Mémoires de Berlin savoir que l'image produite par chaque verre antérieur devient objet pour le verre suivant. Ces détails sont suivis de l'exposition des avantages qu'il y a à multiplier les oculaires intermédiaires; on connoît ces avantages, mais on sait aussi qu'ils sont compensés par plus d'un désavantage; cette compensation ne sera pas parfaite; je laisse aux Opticiens à examiner de quel coté panche*

53) *Ludlam, Astronomical observations made in St. John's College with an account of several astronomical instruments*, Cambridge 1769. 54) *Bernoulli, Becueil* etc., Tome I. S. 124.

la balance. L'auteur finit par le calcul de l'amplification, et sa méthode revient à la formule connue de M. Euler, $m = \frac{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta}{a\ b\ c\ d}$.“

Eigentlich müssten diese Symbole in Klammern stehen. Es ist diess einer der wenigen Fälle, wo Euler's Kettenbruchalgorithmen als Basis zu weiteren Forschungen über Systeme von Linsengläsern gedient zu haben scheinen.

III. Zu §. 4. Muschelius v. Moschau, um die latinisirte Form beizubehalten, versuchte seine Kräfte auch an dem altberühmten delischen Problem. Die erste Konstruktion, welche er angiebt, leitet er mit den stolzen Worten ein[55]: *„cum methodus monstrans, quatenus ope solius circini et vulgaris regulae dicta cubi duplicatio perfici possit, adhuc â nemine sit inventa néque proposita, eam hic communicare volui“* — indess entspricht sie denselben natürlicherweise nicht, sondern läuft auf Probiren hinaus. Seine zweite Methode[56] dagegen beruht auf einem Instrumentchen, welches im Wesentlichen mit dem von Plato zum gleichen Zwecke in Vorschlag gebrachten[57] übereinstimmt.

IV. Zu §. 4. Einigermassen hierher gehört auch der Versuch des Erlanger Mathematikprofessors Poezinger, aus

$$\log(x-1) \text{ und } \log(x+1)$$

den Logarithmus von x selbst zu finden. Am Schlusse einer ziemlich weitläufigen Untersuchung, bei welcher, im Sinne der Zeit, unendliche Reihen, über deren Konvergenz gar nichts bekannt ist, in der ungenirtesten Weise summirt, potenzirt etc. werden, kommt er zu der Formel[58]

$$\log x = \frac{\log(x+1) + \log(x-1)}{2} + 2M\left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{12x^6} + \frac{1}{16x^8} + \cdots\right),$$

unter M den Modul des briggs'schen Systemes verstanden. Bei einer praktischen Anwendung derselben ergiebt sich ihm eine Differenz mit einer ähnlichen Rechnung von Keill, die er zu seinen Gunsten auslegt.

---

55) *Muschel de Moschau, Methodus duplicationis cubi geometricae, monstrans, quatenus illa ope solius circini, et vulgaris regulae (quod lineale vocamus) perficienda sit*, Miscell. etc. Dec. III., Annus IV. S. 95. 56) *Id. Methodus alia duplicationis cubi per quatuor regulas rectangulares*, Ibid. S. 101 ff. 57) *Bretschneider*, Die Geometrie und die Geometer vor Euclides, Leipzig 1870. S. 141. 58) *Poezinger*, Von Erfindung des Logarithmen von x aus den Logarithmen von $x+1$ und $x-1$, Erlangische Gelehrte Anzeigen auf das Jahr 1749. S. 233.

Kapitel VI.

Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter.

§. 1. Die in den folgenden Zeilen niedergelegte Untersuchung bezieht sich auf einen Punkt, für den von mathematisch-historischer Seite nur sehr wenig geschehen ist, dessen Aufklärung vielmehr fast ausschliesslich der rabbinischen Wissenschaft anheimfiel. Gewiss wäre es nun im hohen Grade unrecht, die von dieser Seite stammenden Leistungen mit geringschätzigem Blicke zu betrachten, denn nur auf dem Boden der eigentlich jüdischen Gelehrsamkeit konnte sich die nöthige Fachkenntniss zur richtigen Beurtheilung der hier in Frage kommenden oft höchst komplizirten Verhältnisse vorfinden. Ist doch die jüdische Chronologie, deren Studium hier massgebend ist, nicht in gleichem Sinne ein Zweig der angewandten Mathematik, wie die anderer Kulturvölker, und spielt doch das so eigenthümliche Ritualgesetz an allen Stellen so wesentlich bestimmend seine höchst wichtige Rolle. Nur mit Zagen darf es in der That der Nichtfachmann auf diesem Gebiete wagen, sich und Anderen Licht über dunkle Punkte verschaffen zu wollen, und keinesfalls darf daran gedacht werden, etwas Fertiges oder gar Unanfechtbares zu liefern. Wenn hier gleichwohl das Wagniss unternommen wird, selbstständig vorzugehen, so muss die Entschuldigung, resp. die Berechtigung hiezu in zwei wichtigen Umständen gesucht werden. Einmal nämlich begegnet es den Hebräisten nicht selten, dass ihnen das allgemeine Interesse entschlüpft, und dass der bereits den jüdischen Scholastikern des Mittelalters lieb gewordene Hang zur Polemik allzusehr hervortritt; aus diesem Grunde ist es vielleicht für die Sache selbst von Vortheil, wenn ein nicht ganz so tief in den Gegenstand Eingedrungener, dafür aber desto Unbefangenerer an ihn herantritt und ihm eine allgemeiner interessante Seite

abzugewinnen sucht. Zugleich leitete der Gedanke, ein Feld, an dessen Kultivirung nur ein einziger unter den neueren mathematischen Historikern hervorragenden Antheil genommen hat, durch übersichtliche Darstellung der allmählich gewonnenen Resultate zugänglicher zu machen. Auch berücksichtigen die Arbeiten Steinschneider's vorzugsweise die sprachliche und rein historische Seite der Wissenschaft, und diess bekanntlich in nicht zu übertreffender Weise; dagegen tritt das, was für die Entwickelungsgeschichte der Mathematik als Wissenschaft von besonderem Interesse ist, nothwendig etwas in den Hintergrund.

Das eigentliche Motiv dieser Studie bildet eine Bemerkung von Littrow[1]). Derselbe spricht an dieser Stelle von dem eigenthümlichen Mangel an induktivem Sinn, welchen wir bei der gelehrten Welt des Mittelalters wahrnehmen, erwähnt dann einiger bemerkenswerther Ausnahmen und sagt schliesslich: „Einzelne Männer hatten selbst lange vor Roger Baco den richtigen Weg der Naturforschung eingeschlagen. Auch dafür sei ein vielleicht weniger bekannter Beleg beigebracht. Die Sichtbarkeit der Sichel nach dem Neumonde hat für die Juden eine rituelle Bedeutung, da der kirchliche Anfang ihrer Monate davon abhängt. Ihr grosser Weltweiser Maimonides überliefert uns im zwölften Jahrhundert das Verfahren, nach welchem sie geraume Zeit hindurch die Momente notirten, da die Lunula sich dem Auge zeigte, und daraus eine Formel ableiteten, mittelst deren man je nach der Stellung von Sonne und Mond die Zeit des Sichtbarwerdens der Sichel berechnen kann. Das ist Induktion wie sie leibt und lebt, aber die Zeit war noch lange nicht gekommen, da der Boden für solchen Samen empfänglich wurde, da man die hohe Bedeutung jenes Verfahrens überhaupt erkannte".

Wäre der hier angezogene Ausspruch Littrow's in allen Stücken korrekt, so würde er ein geschichtlich-mathematisches Faktum von der grössten Tragweite repräsentiren. Es soll nun der Versuch gemacht werden, denselben einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen; hiebei wird es sich als erforderlich ausweisen, die Grundzüge der jüdischen Kalendariographie

1) *C. v. Littrow*, Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften, Wien 1869. S. 24.

selbst vorzuführen, deren kurze und populäre Erörterung ausgesprochenermassen ein Hauptzweck der ganzen Arbeit ist. Freilich giebt es bereits gute Darstellungen dieses Wissenszweiges; aber theils sind dieselben, wie z. B. Ideler's Hauptwerk[2]), zu umfänglich, theils vernachlässigen sie den gerade hier in Betracht kommenden integrirenden Punkt, wie diess z. B. bei der sonst empfehlenswerthen kurzen Zusammenstellung Mädler's der Fall ist[3]).

§. 2. Abgesehen von Kompendien sind in der neuesten Zeit über Themata aus der althebräischen Chronologie und Kalendereinrichtung so viele zum Theil umfangreiche Forschungen entstanden — wir nennen nur die Namen Nesselmann, Slonimski, Steinschneider —, dass es nicht immer leicht ist, sich völlig über einzelne Punkte zu orientiren. Ueberdiess ist der weitaus grösste Theil dieser Abhandlungen in einer für fernerstehende Leser grossentheils unverständlichen Terminologie abgefasst, vielleicht auch in wenig zugänglichen Fachzeitschriften niedergelegt; dazu tritt noch der Umstand, dass es nicht leicht eine gleich eng begrenzte wissenschaftliche Disziplin geben wird, in welcher — wie das oben bereits angedeutet ward — die Kontroverse sich einer gleich ausgedehnten Herrschaft erfreute, und in welcher die Menge der unzweifelhaft feststehenden Fakta eine relativ gleich geringe wäre.

Die allerneueste Zeit hat auch hier, wenigstens theilweise, Abhülfe geschafft. Durch das kürzlich erschienene in klarer und anregender Sprache verfasste Werkchen von Schwarz[4]) ist es auch dem, welcher die gelehrten Streitigkeiten der Talmudisten möglichst zu umgehen wünscht, möglich geworden, über einschlägige Fragen sich Raths zu erholen. Allerdings dürfen wir auch hier nicht alles Gebotene kritiklos entgegennehmen, indem von einer besonders dem Mathematiker achtungswerthen Seite gewichtige Bedenken[5]) gegen die genannte Schrift geltend gemacht wurden. Es hat nun freilich Schwarz[6]) in

2) *Ideler*, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, 2. Band, Berlin 1826. 3) *Mädler*, Populäre Astronomie, Berlin 1861. S. 601 ff. 4) *Schwarz*, Der jüdische Kalender, historisch und astronomisch untersucht, Breslau 1872. 5) *Slonimski*, Rezension hiezu, Geiger's jüdische Zeitschrift, 11. Jahrg. S. 122 ff. 6) *Schwarz*, Zur Geschichte des konstanten Kalenders, Fränkel's Zeitschr. f. Gesch. u. Literatur des Judenthums, 23. Jahrg. S. 375 ff.

einer längeren Antikritik seine Stellung diesen Angriffen gegenüber zu wahren gesucht, und wir befänden uns so in der für unseren Zweck höchst unerquicklichen Lage, uns auf keine feste Autorität beziehen zu können, denn gewiss kann es nur einem mit allen hier eingreifenden Detailfragen völlig vertrauten Manne zustehen, ein endgültiges Urtheil in dieser Streitsache zu fällen.

Glücklicherweise steht jedoch die Sache nicht ganz so schlimm, als es auf den ersten Blick scheinen könnte. Die Ausstellungen Slonimski's — mögen sie nun durchweg gegründet sein oder nicht — beziehen sich ausschliesslich auf Punkte, die zur Entscheidung unserer Frage mehr oder weniger irrelevant sind. Dass diess sich wirklich so verhält, glauben wir am besten nachweisen zu können, wenn wir die Rezension Slonimski's in ihren Hauptpunkten uns kurz ansehen.

Der erste und für die Beurtheilung des Ganzen schwerstwiegende Einwurf richtet sich gegen die hohe Stellung, welche Schwarz den wissenschaftlichen Leistungen der ältesten jüdischen Gelehrten zuweisen soll. Wir können, wie gesagt, uns kein entscheidendes Urtheil anmassen, dürfen aber behaupten, dass unsere Zwecke unter diesem Dilemma in keiner Weise leiden. Denn, wie man aus dem Bisherigen bereits bemerkt haben wird, beabsichtigen wir die Littrow'sche Ansicht wenn nicht direkt zu widerlegen, so doch zu zeigen, dass sie viel zu optimistisch sich die Sache denkt. Können wir nun diesen Nachweis mit Hülfe des Schwarz'schen Buches leisten, so wird man gewiss den Vorwurf nicht erheben können, als hätten wir die Wissenschaft des Judenthums absichtlich zu niedrig abgeschätzt. Der zweite Einwand bezieht sich auf die Einführungszeit der sogenannten Tekupha, von der späterhin ausführlicher die Rede sein wird. Slonimski glaubt als bestimmt annehmen zu dürfen, dass der jetzige jüdische Kalender nicht der talmudischen*) Aera entstammen könne. Da

*) So bekannt das Wort „Talmud" auch allgemein ist, so selten verbindet man damit richtige oder auch nur bestimmte Begriffe. Es wird deshalb nicht ohne Interesse sein, wenn wir hier eine kurze historische Auseinandersetzung über diesen Gegenstand einschalten, welche wir einem unlängst erschienenen populären Werkchen[7]) entnehmen. Der Talmud

7) *Stern*, Ueber den Talmud, Würzburg 1875.

wir uns mit einer weit späteren Epoche zu beschäftigen haben, so können wir auch diese Frage getrost in der Schwebe belassen, doch kommen wir weiter unten nochmals darauf zurück.

Es versteht sich gleichwohl von selbst, dass wir nicht gerade von Maimonides auszugehen nöthig haben. Dieser gefeierte Polyhistor des jüdischen Mittelalters war nicht eigentlich Mathematiker oder Astronom von Beruf — der gleichnamige Kommentator des Alfraganus scheint mit ihm, nach Steinschneider[8]), in keinerlei Beziehung gesetzt werden zu dürfen —; vielmehr begnügte er sich, wie diess auch aus Littrow's (s. 1.) Worten hervorgeht, die astronomischen Kalenderregeln als Spezialkapitel eines allgemeinen Systemes zu behandeln. Steinschneider (a. a. O.) bemerkt hierüber: „Maimonides behandelte die jüdischen Kalenderregeln in dem arabischen Kommentar zum Traktat Rosch haschana, in einer besonderen Schrift (1158) und namentlich in einem Abschnitte seines Gesetzkodex, dessen Kommentation wieder ein Mittelpunkt für die Thätigkeit vieler Späteren wurde, wie z. B. Obadja ben David in Aegypten (1325), Levi ben Chabib (um 1500) u. s. w. — ferner Abraham ben David (um 1160) und Andere".

§. 3. Die Zeitrechnung des alten jüdischen Volkes war auf das sogenannte gebundene Mondjahr basirt, d. h. auf einen Zyklus, der sich nicht ausschliesslich an die Erscheinungen des Mondes anlehnte — denn sonst würden sich im Laufe der Jahre die grössten Unzukömmlichkeiten ergeben haben —, sondern auch auf den Lauf der Sonne Rücksicht nahm. Von

ist durchaus kein fertiges System der Religionswissenschaft, sondern eine Sammlung von einzelnen zu den verschiedensten Zeiten angestellten Studien und Betrachtungen berühmter Lehrer. Jehuda der Heilige sammelte um 190 n. Chr. den tradirten Lehrstoff und schrieb ihn unter dem Titel „Mischna", d. i. wiederholte Lehre, nieder — der älteste Theil des Talmud. Im 4. Jahrhundert hatte sich dieser Anfang zu einem umfassenden Gebäude, dem sog. jerusalemischen Talmud erweitert, zu dem um's Jahr 500 n. Chr. durch die Bemühungen der in der mesopotamischen Diaspora wohnenden Glaubensgenossen der babylonische Talmud als Seitenstück hinzutrat. Der Talmud zerfällt in zwei Unterabtheilungen, die „Halacha" und „Agada", in unserem Sinne etwa Theorie und Praxis.

8) *Steinschneider,* Ersch u. Gruber's Enzyklopädie, Sekt. II., Band 21. S. 437.

höchster Wichtigkeit war die Festsetzung des Eintrittes jedes neuen Monates; als Norm für diess Ereigniss war das erste Erscheinen der Neumond-Sichel in der Abenddämmerung vom Gesetze bestimmt. Um diesen Termin zu erkennen, standen zwei Hülfsmittel zu Gebote — die blosse Beobachtung einer-, die astronomische Berechnung andererseits. Man erkennt sofort, dass jede der beiden Bestimmungsweisen ihre eigenthümlichen Vorzüge und Nachtheile hat. Die blosse Beobachtung war all den Fehlern unterworfen, mit welchen jedes Zeugniss unserer Sinne behaftet zu sein pflegt; jedoch wussten, wie wir sofort sehen werden, die Männer des Gesetzes diesem Fehler bis zu einem gewissen Grade abzuhelfen. Auf der anderen Seite kann auch eine rein astronomische Berechnung, selbst wenn sie über ganz andere mathematische Hülfsmittel zu verfügen hat, als den jüdischen Gelehrten zur Disposition standen, nie genau den Moment fixiren, wo der Mond sichtbar zu werden beginnt*).

*) Es ist diess offenbar nichts anderes als ein Problem der Optik, dem sich etwa folgende Fassung geben liesse:

Ein Punkt (der Beobachter) bewegt sich in einem Kreise mit gegebener Geschwindigkeit; ein Gleiches thut, unter Voraussetzung einer anderen konstanten Geschwindigkeit eine an sich dunkle Kugel. Es sei nun gegeben eine feste mit homogener Leuchtkraft ausgestattete zweite Kugel, und es sei die Zeit zu bestimmen, nach deren Verlauf die durch letztere auf ersterer Kugel erzeugte Lichtphase, von jenem Punkt aus gesehen, einen bestimmten scheinbaren Durchmesser = α^0 erhält.

Nach erfolgter Auflösung dieser Aufgabe würde man im Resultat denjenigen Bogenwerth für α zu substituiren haben, welchen ein normales Auge als leuchtend auf dunklem Hintergrunde noch zu erkennen im Stande ist. Bekanntlich giebt es einen bestimmten numerischen Werth für diese Grösse mit voller Genauigkeit nicht, indem zu viele verschiedene Faktoren bedingend darauf einwirken. Humboldt[9]) bemerkt in Bezug darauf: „In der Bestimmung des kleinstmöglichen optischen Sehwinkels, unter welchem irdische Objekte dem blossen Auge erkenntlich sind, ist man seit Robert Hooke, der noch streng eine volle Minute festsetzte, bis auf Tobias Mayer, welcher 34″ für einen schwarzen Fleck auf weissem Papier forderte, ja bis zu Leeuwenhoek's Spinnfäden (unter einem Winkel von 4″,7 bei sehr gewöhnlicher Sehkraft sichtbar) immer vermindernd fortgeschritten... Das Problem ist gar nicht im Allgemeinen numerisch zu lösen, da alles von den Bedingungen der Gestalt der Objekte,

9) *A. v. Humboldt*, Kosmos, 3. Band, Stuttgart u. Tübingen 1850. S. 68.

§. 4. Schwarz theilt die Geschichte des hebräischen Kalenders in drei Perioden ein[10]). Im ersten Zeitraum, welcher von den ältesten Zeiten bis zur Rückkehr der nach Babylon verpflanzten Juden in ihre Heimath reicht, scheint die Bestimmung des Monatsanfanges noch ziemlich lax vorgenommen worden zu sein, anders in der zweiten Periode, welche Schwarz[11]) von Esra bis zu dem Rabbi Juda I. rechnet. „Das Beobachtungsverfahren" — sagt unser Gewährsmann (a. a. O.) — „ist ein viel strengeres, als in der früheren Zeit. Während man in der biblischen Epoche Neumonde und Feste einsetzte und anordnete, je nachdem die Mondphasen dazu aufforderten, betrachtete man in der zweiten Epoche die Fixirung des Monatsanfanges als einen gerichtlichen Akt, dem ein Zeugenverhör vorausgehen musste. Aller Wahrscheinlichkeit nach hat schon die grosse Synagoge die Einrichtung getroffen, dass die Neumonde — wenigstens der zwei Festmonate Nisan und Tischri — vermittelst Beobachtung und Aussage glaubwürdiger Zeugen angesetzt wurden; und wir sind zu dieser Annahme um so mehr berechtigt, als wir uns sagen müssen, dass unsere Alten dieses Verfahren als das geeignetste Mittel erkennen mussten, die Länge des Monates zu eruiren". Ueber den juristischen Modus des hier erwähnten Zeugenverhöres werden verschiedene höchst interessante Einzelheiten mitgetheilt, welche den hohen Werth, den man auf diese Bestimmung legte, klar hervortreten lassen.

Vergleichen wir mit dem bisher Gesagten jene Stelle bei Littrow, so ergiebt sich zunächst, dass der erste Theil derselben auf vollständiger Wahrheit beruht, indem wirklich geraume Zeit hindurch der Moment markirt wurde, wo die Lunula sich dem Auge zeigte. Ob aber der Zweck dieser

---

ihrer Erleuchtung, ihres Kontrastes mit dem Hintergrunde, von dem sie sich abheben, der Bewegung oder Ruhe und der Natur der Luftschichten, in denen man sich befindet, abhängt". Diess zusammengenommen wird man für α in dem uns hier beschäftigenden Falle einen sehr kleinen Werth, der vielleicht bis nahe an eine Sekunde herangeht, annehmen müssen, indem die hier sehr beträchtliche Kontrastwirkung das Erkennen erleichtert, während noch dazu unter dem Himmel Palästinas ungewöhnlich günstige meteorologische Vorbedingungen vorhanden waren.

---

10) *Schwarz*, S. 6. 11) *Ibid.* S. 14.

Beobachtungen wirklich genau der war, welchen Littrow angiebt, das muss vorläufig noch dahingestellt und weiterer Untersuchung vorbehalten bleiben.

§. 5. Fürs Erste scheint es nun allerdings auch vollkommen richtig zu sein, dass man sich nicht damit begnügte, in jedem einzelnen Falle den Monatsanfang durch blosse Zeugenvernehmung festzustellen, sondern dass man auf diese letztere auch eine Art von Berechnung zu gründen bestrebt war, sei es auch nur als Präventivmassregel, um bei Ausnahmefällen, wo aus irgend einem Grunde keine Zeugen aufzutreiben waren, doch einen einigermassen sicheren Anhaltspunkt zu besitzen. Hiezu brauchte man nur, meint Schwarz[12]), „die Distanzen der Meridiane, unter welchen zwei aufeinanderfolgende Neumonde in der Abenddämmerung beobachtet wurden, genau zu kennen, um die Dauer des einen oder anderen Monates präzise zu bestimmen, und nach einer Reihe von solchen Beobachtungen, die Summe der aufgezeichneten Tage, Stunden u. s. w. durch die Anzahl der Monate zu dividiren, um die Länge des Monates zu erfahren".

Nun könnte man vielleicht geneigt sein, diese Thatsachen mit dem zweiten Theile des Littrow'schen Ausspruches zu identifiziren und so auch diesen zweiten Theil als historisch erwiesen zu erachten. Dem lässt sich jedoch zweierlei mit allem Fug entgegenhalten. Einmal nämlich ist von einer eigentlichen Berechnung, bei welcher auch der wechselnde Stand von Sonne und Mond mit berücksichtigt wäre, nicht im Entferntesten die Rede — im Gegentheile, die Sache ist so einfach, dass der Ausdruck „Berechnung" kaum auf sie passt. Handelte es sich doch eigentlich nur darum, aus $s_1 \ldots s_n$ gemessenen Monatslängen das arithmetische Mittel gleich

$$\sum_{i=1}^{i=n} s_i : n$$

herzuleiten. Und zweitens wird es doch wohl nicht gestattet sein, einem solchen Verfahren den Ehrentitel eines „induktiven" beizulegen. Nach der Definition des kompetentesten Richters auf diesem Gebiete, Stuart Mill[13]), ist „Induktion dasjenige

12) *Schwarz*, S. 15. 13) *Schiel*, Die Methode der induktiven Forschung als die Methode der Naturforschung in gedrängter Darstellung hauptsächlich nach John Stuart Mill, Braunschweig 1865. S. 13.

Verfahren, durch welches allgemeine Urtheile oder allgemeine Wahrheiten bewiesen werden, sie ist die Verstandesoperation, durch die wir schliessen, dass das, was auf einen besonderen Fall (oder besondere Fälle) wahr ist, auch in allen anderen Fällen wahr sein wird, welche jenem ersten Fall in einer nachweisbaren Beziehung ähnlich sind, dass, was von gewissen Individuen einer Classe wahr ist, auch für die ganze Classe wahr ist, oder dass, was zu gewissen Zeiten wahr ist, auch unter ähnlichen Umständen zu allen Zeiten wahr sein wird".

Mit dieser Definition stimmt nun aber die oben geschilderte Methode der Juden durchaus nicht überein; dieselbe ist nicht induktiv, sondern rein empirisch. Wollte man in allen ähnlichen Fällen, also z. B. überall, wo die Anwendung eines einfachen arithmetischen Mittels uns entgegentritt, diese Bezeichnung beibehalten, so würde sich die induktive Naturforschung bis zu einer sehr frühen Epoche hinauf verfolgen lassen.

Wenn nun aber auch diess Verfahren die Probe nicht hält, so könnte diess doch vielleicht mit den anderen Bestimmungsweisen der Fall sein, deren sich die hebräischen Astronomen zur Kalenderregulirung bedienten. Vergewissern wir uns nunmehr auch in dieser Richtung.

§. 6. Bereits in jener zweiten Periode, innerhalb deren sich unsere bisherige Darstellung bewegte, beruhte die Bestimmung des Monatsbeginnes nicht mehr ausschliesslich auf der Beobachtung; im Gegentheile erkannten die an der Spitze stehenden Männer den Vortheil der von allen Zufälligkeiten befreiten astronomischen Berechnung so deutlich, dass nothwendig eine eigenthümliche Verbindung oder, besser gesagt, Verquickung beider Methoden resultiren musste. Diess ergiebt sich schon aus dem von Schwarz[14]) angeführten Umstande, dass die Dauer des Schaltmonates *a priori* festgesetzt wurde, denn „wäre die wahre Konjunktion resp. das Sichtbarwerden des Mondes immerdar massgebend gewesen, hätte man der Berechnung gar keinen Raum gegönnt, so ist nicht abzusehen, wie man im Voraus über den Charakter des Monates mit Sicherheit beschliessen konnte".

Dass diese Art der Berechnung erst nach und nach sich

14) *Schwarz*, S. 17.

verbesserte und selbstständiger wurde, ist an sich klar; im Ganzen trug sie jedenfalls den Charakter der Zyklenbestimmung, welche wir mehr oder weniger ausgeprägt bei allen alten Kulturvölkern vorfinden — es sei in dieser Beziehung nur an die Hundsternperiode der Aegypter, an den Saros der Chaldäer, an den neunzehnjährigen Zyklus des Atheners Meton erinnert. Bekanntlich geht in der ältesten Zeit die ganze Sternkunde in solchen Zyklen auf, die ja auch allein die Vorherbestimmung von Verfinsterungen ermöglichen konnten, und es ist sogar höchst wahrscheinlich, dass die Bestrebungen zur Ausmittelung brauchbarer Zyklen eine höchst förderliche Rückwirkung auf die Zahlenlehre ausübten, wie wir diess an einem anderen Orte ausführlicher darzulegen gesucht haben*). Allein ob wir diesen theilweise so überaus genau ihren Zweck erfüllenden Methoden diejenigen der Hebräer überhaupt nur gleichstellen dürfen, scheint doch nicht einmal sicher; eine besondere Leistung von Seite dieser letzteren liegt sonach in keiner Weise vor. Diess spricht auch Schwarz[15]) mit aller nur wünschbaren Deutlichkeit aus, wenn er angiebt: „Die Art und Weise, wie man den Ausgleich des astronomischen Mondjahres mit dem tropischen Sonnenjahre bewerkstelligte, ist der beste Beweis dafür, dass man keinen nach Prinzipien geregelten Schaltzyklus gekannt". Dass man aber dem Genannten eine Unterschätzung der alten jüdischen Gelehrten nicht zum Vorwurfe machen kann, davon haben wir uns bereits oben (s. §. 2.) überzeugt, und es rechtfertigt sich nun auch unsere Behauptung, dass unsere Schlussfolgerungen auf um so festerem Boden stehen, je mehr Slonimski's Vorwurf mit der Wahrheit übereinstimmt.

Wesentlich anders wurde es erst in der von Schwarz so genannten dritten Periode, gerechnet bis zur Zeit des berühmten Rabbi Hillel (um 300 n. Chr.). Nach Basnage[16]) — um mit wenigen Worten den Charakter der nun sich voll-

*) Eine gang kürzlich im 8. Bande des *Bullettino Boncompagni* abgedruckte Arbeit von A. Favaro gelangt, wie in anderen Fragen, so auch in dieser zu ganz denselben Resultaten, wie die unsrige im 7. Bande erschienene.

15) *Ibid.* S. 25. 16) *Basnage, Histoire des Juifs*, Tome II., Rotterdam 1707. S 656.

ziehenden Neuerung festzustellen — nahm derselbe ein grosses Jahr, d. h. einen dem Meton'schen entsprechenden Sonnenzyklus von 19 Sonnenjahren an und verlegte die Schaltmonde in das 3., 6., 8., 11., 14., 17. und 19. Jahr. Ferner gehören in diese Zeit der Babylonier Samuel (um 240) und Adda (um 250), von welch letzterem Wolf[17]) berichtet, dass er, gestützt auf Hipparch, resp. Ptolemaeus, seinen Vorgänger Samuel zu verbessern getrachtet habe. Er habe auch[18]) Regeln zur Berechnung der Aequinoktien und Solstitien entworfen, „welches er Tekuph nannte".

Die hier nach älteren Autoren gegebene Zeitbestimmung der Adda'schen Tekupha wird im Wesentlichen auch von Schwarz anerkannt, während sie allerdings nach Ansicht einer so bedeutenden Autorität, wie Slonimski, gänzlich unrichtig und um 6—7 Jahrhunderte zu niedrig angesetzt ist; auch glaubt letzterer, dass der Almagest als einzige Norm gedient habe[19]): „Die Länge des synodischen Monates fand man durch Verwandelung der von Ptolemäus angegebenen Sexagesimaltheile in gewöhnliche Brüche".

Schwarz erhebt gegen Slonimski's Auffassung folgendermassen[20]) Einrede: „Die letzten kalendarischen Arbeiten Slonimski's datiren aus dem Jahre 1864, und in diesen vertritt er die Ansicht, die Adda'sche Tekupha stamme aus dem 10. Jahrhundert, und die Hauptprinzipien unseres auf der Samuel'schen Tekupha beruhenden Kalenders seien dem Almagest entlehnt. Denn sowohl die mittlere Monatslänge als auch die Epochen unserer Moledoth und Tekuphoth sind nichts anderes als den Ptolemäischen astronomischen Tabellen entlehnte Daten. Also, alles hätten die Begründer des Kalenders von den Griechen, warum gerade die Länge des tropischen Jahres nicht? So muss doch jeder fragen, der da weiss, dass der Samuel'schen Tekupha das julianische und nicht das Ptolemäische Jahr von

$$365^d\,5^h\,55'\,12''$$

zu Grunde liegt". Diess letztere Moment scheint uns aller-

17) *J. C. Wolf, Bibliotheca Hebraica*, Tom. I., Hamburgi et Lipsiae 1715. S. 109. 18) Geschichte der Astronomie von der ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten, 1. Band, Chemnitz 1792. S. 220. 19) *Schwarz*, S. 40 20) *Schwarz*, Zur Gesch. d. konst. Kalenders, S. 377.

dings zu Gunsten der älteren Auffassung zu sprechen; indess wollen wir uns auch hier, festhaltend an dem oben ausgesprochenen Grundsatze, kein vorgreifendes Urtheil gestatten, sondern lediglich zusehen, ob die eine oder andere Ansicht dazu angethan ist, auf unser Unternehmen wesentlich modifizirend einzuwirken. Doch ist hiezu die Kenntniss dessen, was man unter dem Terminus „Tekupha" versteht, vor Allem erforderlich.

§. 7. Die wissenschaftlichen Bestrebungen zur Neuregulirung des Kalenderwesens auf astronomischer Basis mussten stets die erste Sichtbarkeit der Mondessichel zum Ausgangspunkte nehmen; so ward dem erwähnten Rabbi Samuel, als er seine Gedanken über die Ausarbeitung eines konstanten Kalenders höheren Ortes zur Vorlage gebracht hatte, die Frage entgegengehalten, ob er die Zeit genau anzugeben vermöge, welche zwischen der den eigentlichen Neumond bedingenden Konjunktion und dem Sichtbarwerden verstreicht — eine Frage, die in solcher Schroffheit hingestellt, der babylonische Astronom natürlich verneinen musste[21]). So zurückgewiesen suchte derselbe gleichwohl das Kalender-Kollegium für seine Ideen zu gewinnen, und bei seinen weiteren Arbeiten gelangte er zur Tekupha. Diess ist[22]) nichts anderes als die Fixirung des mittleren Anfanges der Jahreszeiten. Dieselbe wurde nun, wie diess in dem Buche von Schwarz ausführlich gezeigt wird, verschieden berechnet; wie man aber die Rechnung auch betrachten mag, so erhebt sie sich in keiner Weise über das Niveau, auf dem sich auch bei anderen Völkern die wissenschaftliche Chronologie befand. Am allerwenigsten aber ist von der auf lang fortgesetztes Beobachten der Sichtbarkeit gegründeten Formel etwas zu erblicken, welche Littrow entdeckt zu haben glaubt.

Kehren wir nun zu unserer obigen Frage zurück. Hat Slonimski Recht, so mindert sich Maimonides' Verdienst entschieden, denn er hatte dann blos einen Gegenstand zu behandeln, der der Zeit nach unmittelbar hinter ihm lag, den er durch mündliche Ueberlieferung noch ganz genau kennen musste, und den zu beherrschen es keiner hervorragenden Durchbildung bedurfte. Anders verhält sich die Sache, wenn

21) *Schwarz*, S. 31. 22) *Ibid.* S. 65.

man sich für die andere Auslegung entscheidet. Denn, wenn auch die ursprüngliche Formulirung der Tekupha nicht auf Littrow's Beschreibung passt, so hätten ja doch — könnte man einwenden — im Laufe so vieler Jahrhunderte noch allerlei Zusätze hinzugefügt werden können, welche das ursprüngliche Gepräge veränderten und das Ganze auf einen höheren wissenschaftlichen Standpunkt erhoben. Allein ganz abgesehen von der wissenschaftlichen Leblosigkeit, welche jener ganzen Epoche ihren Stempel aufdrückte, liegt uns keine geschichtliche Thatsache vor, welche zur Rechtfertigung einer solchen Ansicht dienen könnte. Der Vollständigkeit halber übrigt es uns jedoch noch, auch einen Blick auf die sogenannte „Dechijoth" zu werfen.

Die Dechijoth ist eine Vertagung, d. h. es wird ein gewisses Fest nicht an dem Tage gefeiert, an welchem es, den angegebenen gesetzlichen Bestimmungen gemäss, gefeiert werden sollte, sondern auf den nächsten Tag verlegt. Ohne auf die zahlreichen, von Schwarz ausführlich diskutirten, Hypothesen über deren eigentlichen Charakter hier näher einzugehen, möge nur das schliessliche Ergebniss dieser Studien hier eine Stelle finden, weil es für unseren eigentlichen Zweck[23]) von Bedeutung ist. „Die Begründer des Kalenders führten die Dechijoth nur aus dem Grunde ein, um die Kalenderrechnung dem durch Jahrhunderte geheiligten Brauche, die Neumonde am Tage des Sichtbarwerdens der Mondsichel zu feiern, auf's engste anzupassen." Von der kalkulatorischen Seite der Dechijoth gilt das Nämliche, was früher von der Tekupha gesagt wurde.

§. 8. Rekapituliren wir nun noch einmal kurz den Gang unserer Untersuchung. Es handelte sich darum, ob die von Littrow aufgestellte Behauptung bezüglich der bei Maimonides sich findenden Berechnungsmethode des Neumondes thatsächlich richtig sei oder nicht. Da die Erfindung ausdrücklich nicht dem Maimonides selbst zugeschrieben war, so war es nicht erforderlich, die wissenschaftliche Stellung dieses Mannes zu analysiren. In der That ist das, was wir von ihm und den Umständen wissen, unter welchen er wirkte, keineswegs dazu angethan, ihn als eine Persönlichkeit von ungewöhnlicher mathematischer Schaffungskraft zu kennzeich-

23) *Ibid.* S. 61.

nen, so hoch er auch sonst über seinen Zeitgenossen stehen mag. Freilich bot der tradirte Talmud ausser homiletischem und religionsphilosophischem Stoff auch eine Menge rein wissenschaftlichen Materials dar*), aber gerade zu der Zeit, wovon wir reden, scheint ein bedauerlicher Niedergang in dem szientifischen Leben des jüdischen Volkes eingetreten gewesen zu sein, was besonders auch ein so gründlicher Sachkenner, wie Zunz[26]), ausdrücklich bekundet**). Und unter diesen Ver-

*) Wir zitiren nach Stern[24]) folgendes: „Noch ist ein Theil talmudischen Stoffes hervorzuheben, der nicht als der Agada angehörig zu betrachten ist, der wissenschaftliche Theil. Die halachischen Diskussionen führten nämlich auf verschiedene wissenschaftliche Themata: Astronomie, Naturkunde, Anatomie, Medizin, Geometrie, Geschichte etc. Die Talmudisten beurkunden sehr häufig, dass sie auf der Höhe der Wissenschaft standen und die Wahrheit nahmen, wo sie sie fanden ... Die Talmudisten haben einen Mond- und Sonnenjahr kombinirenden Kalender angefertigt, der über den julianischen hinausgieng und nicht nur bis heute keine Mangelhaftigkeit zeigt, sondern auch noch nach vielen Jahrtausenden keine zeigen wird. Dabei ist er so einfach, dass ein gut rechnender Knabe, wenn ihm die wenigen Grundsätze klar gemacht sind, den jüdischen Festkalender anfertigen kann. Die Knochen des menschlichen Körpers sind im Talmud ziemlich übereinstimmend mit der heutigen anatomischen Wissenschaft aufgezählt. Der Talmud weist nach, dass verschiedenen Mischnasätzen geometrische Sätze zu Grunde liegen, die damals nur wenigen Mathematikern bekannt sein mochten". Zum Beleg für letztere Behauptung weisen wir auf das Buch eines gewissen Cnollen[25]) hin.

**) Der eine Grund, mit welchem Zunz sein absprechendes Urtheil zu begründen sucht, dürfte sich indess wohl kaum als stichhaltig erweisen. Wenn er nämlich sagt: „In der Geometrie hielt man bei den Anfangsgründen, und R. Simson in Sens war nicht weiter gekommen, als zu wissen, dass die Diagonale eines Quadrates grösser als $\frac{7}{5}$ der Seite sein müsse", so scheint er uns damit seine französischen Glaubensgenossen im Mittelalter in keinem zu schlechten Lichte darzustellen. Denn aus der nur wenig von einer Gleichung abweichenden Relation

$$50 > 49$$

folgt sofort

$$2 > \frac{49}{25},$$

oder auch, für jedes a,

24) *Stern*, S. 21. 25) *Cnollen*, *Geometria Talmudica*, Poggendorff's Handwörterbuch, 1. Band. S. 458. 26) *Zunz*, Zur Geschichte und Literatur, 1. Band, Berlin 1845. S. 177.

hältnissen muss auch naturgemäss eine so imposante Natur, wie die des Moses ben Maimon unzweifelhaft war, mitgelitten haben; der Analogieschluss von dem jüdischen Scholastiker auf seine christlichen Kollegen, Albertus Magnus, Thomas v. Aquin etc., rechtfertigt diese Anschauung, denn auch diese enormen Kapazitäten vermochten es nicht, sich zu einer Auffassung zu erheben, deren Idee sie eben *a priori* nicht in sich trugen. Maimonides kann für unsere Zwecke somit nur als Kompilator, bezüglich Kommentator, in Betracht kommen.

Wir sahen nun, dass im jüdischen Alterthum die Beobachtung des ersten Erscheinens der Mondsichel den Beginn des Monates bestimmte, sowie auch, dass man noch in viel späterer Zeit an dieser Bestimmung durch Autopsie festhielt, mehr freilich aus Pietät, denn aus Nothwendigkeit. Auf rein empirischem Wege verschaffte man sich so allmählich die durchschnittliche Länge des synodischen Monates; von einer „Formel", die auf Mond und Sonne Rücksicht nahm, konnte weder dem allgemeinen Bildungsstand der Zeit nach die Rede sein, noch hatte dieselbe auch irgend einen Zweck, da ja das arithmetische Mittel vollkommen ausreichte. Allerdings trat später zur reinen Beobachtung die astronomische Berechnung hinzu; aber diese steht wieder mit jener ersten Methode in so gut wie gar keiner Beziehung, bedient sich vielmehr der auch anderwärts so vielfach vorkommenden Zyklen, rekurrirt wol auch — wenigstens ist diess die Ueberzeugung angesehener Gelehrten — auf die Resultate der Astronomen und Mathematiker Griechenlands. War diess der Fall, so mochten die Rabbinen, sofern sie nicht blos gedankenlos rezipirten, sondern wirklich in den Gedankengang ihrer Vorlagen einzudringen sich bemühten, genug mit der Aneignung des fremden Stoffes und mit seiner Zurechtschneidung für ihre eigenthümlichen Verhältnisse zu thun haben; dass sie irgendwie schöpferisch über die Griechen hinausgegangen wären, ist historisch durchaus unbewiesen.

$$\sqrt{2}\,a > \frac{7}{5}\,a,$$

d. h. die Diagonale eines Quadrates weicht vom $\frac{7}{5}$fachen der Seite nur ganz unwesentlich ab. Ohne Zuziehung des Irrationalen scheint eine genauere Bestimmung kaum denkbar.

So sind wir denn zu einem bestimmten Urtheile gelangt. Gewiss muss die Anregung dankbar anerkannt werden, welche Littrow durch seine Bemerkung über jüdische Astronomie gegeben hat, zumal da sein Schriftchen auch sonst an interessanten geschichtlichen Bemerkungen reich ist. Sachlich jedoch müssen wir sagen:

Die von Littrow erwähnte Formel, welche von Maimonides gelehrt worden sein soll, ist nichts anderes, als „eine Konfundirung der beiden Bestimmungen des Neumondes durch Zeugniss des Sichtbarwerdens und durch Berechnung“ *).

Dieses Urtheil hatte der zur Zeit erste Kenner semitischer Mathematik gleich von Anfang an gefällt.

Es könnte vielleicht auffallen, dass die eigentlichen Geschichtschreiber der Astronomie im Vorstehenden gar nicht zitirt wurden; indess sind ihre Arbeiten, wie sich bei genauerem Einblick ergab, durchaus nicht dazu angethan, zur Klärung des hier obwaltenden Dunkels beizutragen. Weidler[27]) giebt nur ganz allgemeine Notizen, Delambre bekümmert sich nur um solche Schriften, die durch bequeme Ausgaben leicht zugänglich gemacht sind[28]), und Mädler[29]) nennt mit gewohnter Flüchtigkeit einige jüdische Astronomen lediglich als Anhängsel der Araber.

Gerade mit Rücksicht auf diese höchst geringe Berücksichtigung eines an sich so überaus wichtigen und auch für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften bedeutsamen Kulturelementes glaubten wir der nunmehr nach Thunlichkeit gelösten Aufgabe auf den Grund gehen zu sollen; möge diess auch als Anregung für Andere gelten, auf diesem Gebiete weiter zu arbeiten.

Note

zu §. 2. Die durch das Erscheinen des Schwarz'schen Werkes hervorgerufene Polemik scheint noch lange nicht zu Ende zu sein, und da wir oben von derselben Notiz genommen haben, so müssen wir diess auch

*) Briefliche Bemerkung von Herrn M. Steinschneider.

27) *Weidler*, *Historia Astronomiae*, Wittebergae 1751. S. 262 ff.
28) *Delambre*, *Histoire de l'astronomie du moyen age*, Paris 1819. S. 211.
29) *Mädler*, Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit, 1. Band, Braunschweig 1873. S. 95 ff.

bei den weiteren Phasen beobachten, in die der Kampf getreten ist. So spricht sich im neuesten Geiger'schen Doppelhefte[30]) ein Amerikaner, Namens Felsenthal, in äusserst heftiger Weise über jene Arbeit aus, und der Herausgeber stellt sich mit aller Entschiedenheit auf die Seite des Angreifers, indem er zugleich eine historische Anekdote anführt (Abu ben David gegen Maimonides), welche die Stellung des reinen Talmudismus zu der von Schwarz angestrebten Vermittelung kennzeichnen soll. So schlecht aber, wie sie hier gemacht wird, ist nun die Schwarz'sche Arbeit ganz sicher nicht, im Gegentheil macht sie, wenn ihr auch kritische Fehler und eine nicht ganz unbefangene Geschichtsbeurtheilung vorgeworfen werden mögen, im Verhältniss zu den Elaboraten anderer jüdischer Gelehrten häufig einen wohlthuenden Eindruck. Auch will es den unparteiischen Zuschauer hie und da bedünken, als ob nicht allein rein szientifische, sondern auch dogmatisch-theologische Beweggründe bei jener gar zu heftigen Verurtheilung mitwirkten.

Wir haben absichtlich uns kein eigentliches Urtheil erlaubt, sondern vielmehr eher für Slonimski's Auffassung, zu welcher sich auch eine so anerkannte Autorität wie Steinschneider bekennt, einige Voreingenommenheit bekundet. Von Schwarz haben wir uns nur insoweit leiten lassen, als die von seinen Gegnern ihm zur Last gelegten Irrthümer zu Gunsten des von uns angestrebten und erzielten Resultates in Rechnung gebracht werden konnten, und insofern wirkt jeder neue Angriff gegen Schwarz für uns und gegen Littrow.

---

30) Brief von *Felsenthal* an *Geiger*, dessen jüd. Zeitschr. 11. Jahrg. S. 295.

Kapitel VII.

Quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf Huyghens.

§. 1. Historische Studien anderweiter Natur veranlassten uns vor längerer Zeit, die Verwendung des Pendels als Zeitmessungsinstrument geschichtlich zu untersuchen. Es stellte sich heraus, dass noch ziemliche Unklarheit in diesem Gebiete herrschte und dass es zweckmässig erscheinen dürfte, an der Hand der Quellen eine wirklich sachgemässe Zusammenstellung aller hier in Frage kommenden Momente zu liefern. Die betreffende Studie erschien[1]) vor zwei Jahren; sie brachte ein ziemlich beträchtliches Material, welches jedoch unter den damaligen Umständen nicht allseitig ausgebildet werden konnte. Eine Reihe von Nebenfragen musste vorläufig noch unerörtert und einer späteren erschöpfenden Untersuchung vorbehalten bleiben.

Ueberdiess ergab es sich, dass sehr Viel von dem, was wir damals als neu hinstellen zu dürfen glaubten, bereits von anderer Seite vorweggenommen war. Der bekannte holländische Mathematiker van Swinden, dessen lebhaftes Interesse für die historische Seite seiner Wissenschaft aus all seinen Publikationen hervorgeht, hatte alle die Fragen, deren Gesammtheit wir als die Vorgeschichte der Pendeluhr bezeichnen möchten, einer höchst gründlichen Untersuchung unterzogen[2]), die nur leider so gut wie gar nicht bekannt geworden zu sein scheint. Dieser Umstand, wie auch die Ueberzeugung, dass wir immer-

1) *Günther*, Die Geschichte der Pendeluhr vor Huyghens, Sitzungsber. d. Erl. phys.-med. Sozietät, 6. Heft. S. 12 ff. 2) *van Swinden*, *Verhandeling over Huijgens, als uitvinder der Slinger-Uurwerken*, Verhandelingen der eerste Klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Institut te Amsterdam, Derde Deel. S. 27 ff.

hin noch viele von ihm nicht antizipirte Thatsachen zur Lösung der Aufgabe beizubringen im Stande sind, hat uns vermocht, eine neue Bearbeitung des Gegenstandes erscheinen zu lassen, welche nunmehr wohl allen Ansprüchen genügen dürfte.

§. 2. Das Alterthum und frühere Mittelalter hatte sich mit Sonnen-, Sand- und Wasseruhren nothdürftig behelfen müssen. Die Erfindung der Gewichtsuhren durch Heinrich von Wyck[3]), die der Räderuhren durch einen allerdings noch sehr problematischen Bologneser Mönch, die der Taschenuhren durch den Nürnberger Mechaniker Peter Henlein[4]) und viele andere mechanische Fortschritte hatten den früheren Zuständen gegenüber allerdings bedeutende Verbesserungen gebracht, aber doch nicht in dem Grade, dass den durch Bernhardt Walther und Tycho de Brahe gerade damals auf's höchste gesteigerten Anforderungen der astronomischen Beobachtungskunst hätte genügt werden können. Ihrem Bedürfnisse vermochte lediglich die Erfindung der Pendeluhr entgegenzukommen. Nun ist es gewiss keinem Zweifel unterworfen, dass dem berühmten Holländer Huyghens, den man gewöhnlich als den Erfinder dieses so sinnreichen Instrumentes zu bezeichnen pflegt, die Ehre der Erfindung auch vollständig gebührt; denn nicht nur hat er in seinem fundamentalen Werke[5]) im Wesentlichen alle die charakteristischen Einrichtungen angegeben, welche noch gegenwärtig im Gebrauche sind, sondern er hat auch die theoretische Seite des Gegenstandes in unübertrefflicher Weise nach allen Richtungen beleuchtet. Das schliesst

*) Wir verdanken die Hinweisung auf diese Arbeit Herrn Prof. Poggendorff. Eine englische Uebersetzung derselben erschien im 6. und 7. Bande des *Edinburgh Philosophical Journal.*

**) Das von uns benützte Exemplar des Doppelmayr'schen Werkes gehörte laut Einzeichnung dem bekannten Alterthumsforscher Theophil v. Murr; derselbe bemerkt in einer Randnote, dass der Erfinder der Taschenuhren nicht, wie man heutzutage noch allgemein liest, Hele, sondern, zufolge einer Angabe des Bürgerbuches von 1509, Henlein geheissen habe.

3) Allgemeine Enzyklopädie der Physik, herausgegeben von *Gustav Karsten*, 1. Band, Leipzig 1869. S. 612. 4) *Doppelmayr*, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730. S. 286**). 5) *Huyghens, Horologium oscillatorium*, Paris MDCLXXIII.

jedoch nicht aus, dass nicht auch anderwärts und vor ihm die seit Galilei's grosser Entdeckung nicht eben fernliegende Idee, das Pendel zur Zeitmessung anzuwenden, ventilirt und zu realisiren versucht wurde, dass, kurz gesagt, die Erfindungsgeschichte der Pendeluhr verschiedene Stadien deutlich erkennen lässt.

Wie uns Alexander v. Humboldt[6]) berichtet, soll schon im zehnten Jahrhundert n. Chr. der Araber Ibn Junis die Pendelschwingungen im gedachten Sinne benützt haben*). Ist dem so, dann liegt die Vermuthung nahe, dass dem ägyptischen Astronomen bereits der Isochronismus der Pendelschwingungen bekannt gewesen sei, denn nur durch ihn konnte man überhaupt auf den Gedanken gebracht werden, die Zeitabschnitte auf diese Weise zu messen.

§. 3. Besprechen wir, ehe wir in die fortlaufende Darstellung der seit Galilei's Zeit gemachten Versuche eintreten, einige damit nicht zusammenhängende Angaben, welche die erste Konstruktion einer Pendeluhr für gewisse Männer in Anspruch nehmen, denen sie ganz sicher nicht zukommt. So bemerkt J. J. v. Littrow[8]), „dass, während auf dem Festlande Huyghens allgemein als der Erfinder der Pendeluhren betrachtet wird, die Engländer diese Ehre ihrem Landsmann Richard Harris vindiziren, der schon im Jahre 1641 eine Uhr mit einem langen Pendel verfertigt haben soll". Wann und wo dieser Harris lebte, vergisst Littrow anzugeben, und da es uns aller Bemühungen unerachtet nicht gelang, über denselben etwas Genaueres zu erfahren, so dürfen wir wohl über diese sogenannte Erfindung hinweg zur Tagesordnung übergehen.

Etwas anders verhält sich die Sache mit dem berühmten Arzte Sanctorius. Derselbe tritt bekanntlich bei mehr als einem physikalischen Instrumente als Mitbewerber von Galilei

*) Hankel[7]) nennt diesen Mann Jbn Yūnos; wir haben jedoch, obschon wir sonst von den Vortheilen der Hankel'schen Transskriptionsmethode überzeugt sind, die weitaus bekanntere ältere Form beibehalten.

6) *A. v. Humboldt,* Kosmos, 2. Band, Stuttgart und Tübingen 1847. S. 258. 7) *Hankel,* Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 244. 8) *J. S. T. Gehler's* Physikalisches Wörterbuch, 2. Aufl., 9. Band, Leipzig 1839. S. 1113.

auf, und wird auch in der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr als solcher genannt. Es ist wohl Libri's Verdienst, hierauf hingewiesen zu haben; er berichtet[9]) von ihm: „*Sanctorius était un homme du plus grand mérite, qui a répandu dans ses ouvrages une foule d'idées ingénieuses. Tout le monde connait sa médecine statique. Non-seulement il a publié le thermomètre et le pendule appliqué à la médecine, que Galilée avait inventés, mais il a imaginé d'autres instrumens de physique*". Da demnach das Instrument des Sanctorius eine Pendeluhr in unserem Sinne ihrer Bestimmung nach nicht eigentlich sein sollte, so wollen wir hier den systematischen Gang der Erzählung nicht seinetwegen unterbrechen, sondern in einer Note seine Prioritätsansprüche ausführlicher diskutiren.

§. 4. Den näherungsweisen Isochronismus der Pendelschwingungen hatte Galilei im Jahre 1583 zuerst wahrgenommen. Damals noch Mediziner von Beruf, beachtete er seine Bemerkung nur insoweit, als sie für seine Wissenschaft nützlich zu sein versprach, und dachte lediglich an die Verwerthung dieser Thatsache für die Messung der Pulsfrequenz. Ueber das Instrument *(pulsilogium)*, welches er zu diesem Zwecke angab, sind wir ziemlich im Unklaren. Aus dem Umstande, dass wir die Vorrichtung des Galilei gar nicht kennen, die des Sanctorius aber doch einigermassen, scheinen manche Schriftsteller sich die Auffassung entnommen zu haben, dass überhaupt diesem letzteren die Entdeckung des Isochronismus zuzuschreiben sei, denn Libri[10]) hält es für nothwendig, für Galilei einzutreten, und an den alle Zweifel beseitigenden Brief desselben an den Marchese Del Monte[11]) zu erinnern, welcher ein Jahr eher geschrieben ward, als Sanctorius seinen Pulszähler verfertigte.

Galilei's Instrument war nun ursprünglich gewiss von höchst primitiver Beschaffenheit. Der Arzt ertheilte dem freihängenden Pendel einen schwachen Anstoss, der immerhin während der kurzen Dauer einer Messung nachhalten mochte, und ein Gehülfe zählte die Oszillationen. Diese Beihülfe eines

---

9) *Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, Tome IV., à Paris 1841. S. 194. 10) *Libri*, Tome IV. S. 172. 11) *Le Opere di Galileo Galilei*, Tomo VI., Firenze 1848. S. 5.

Zweiten entbehrlich zu machen, musste die nächste Bestrebung sein; war ihre Beseitigung für den medizinischen Gebrauch blos wünschenswerth, so wurde sie andererseits gebieterisch gefordert, sobald man daran dachte, den Pulszähler zu einer Uhr umzubilden.

§. 5. Man glaubte in der That lange Zeit hindurch, dass Galilei den hier angedeuteten schwierigen Schritt nicht nur nicht gethan, sondern nicht einmal zu thun versucht habe. Berthoud, der erste Geschichtschreiber der Uhrmacherkunst, betrachtet das als feststehend. Nachdem er von einem ausschliesslich das Pendel behandelnden Werke Galilei's*) eine kurze Analyse gegeben[12]), fährt er fort: „*Nous observerons qu'il pourra paroître aujourd'hui assez étonnant que Galilée, après avoir fait la précieuse découverte du pendule, et en avoir si bien expliqué les propriétés et les divers usages, n'ait pas pensé à l'appliquer à l'horloge*". Auch hier scheint unter den Neueren zuerst Libri die richtigere Auffassung angebahnt zu haben[13]); zwar erklärte er die zu erledigende Frage als einen „*point bien difficile à éclaircir*", aber gewiss war sein Uebersetzer Carové berechtigt, Galilei's eigene Leistungen in dem von uns hier zu reproduzirenden Satz zu subsumiren[14]):

Der einfache Plan, das Pendel mit einem Uhrwerk zu verbinden, welches die Zahl der Schwingungen, oder Stunden, Minuten und Sekunden zeigte, kann Galilei nicht abgesprochen werden.

Diesen Ausspruch quellenmässig zu erhärten und vielleicht auch einigermassen zu erweitern, soll unsere nächste Aufgabe sein.

---

*) Dieses angebliche Werk des Galilei beschreibt Berthoud (a. a. O.) als „*Intitulé L'usage du cadran ou de l'Horloge physique universelle, par Galilée, Mathématicien du Duc de Florence;* Paris, Rocolet, 1639, in 8°". Ein solches Werk giebt es aber nicht; Galilei hat nie etwas in französischer Sprache veröffentlicht, und auch an eine Uebersetzung kann nicht wohl gedacht werden. Vermuthlich suchte ein literarischer Streber seinem Produkt unter der Firma des grossen Mannes leichteren Eingang bei den Leuten zu verschaffen, und das ist ihm denn auch, bei Berthoud wenigstens, gelungen.

---

12) *Berthoud, Histoire de la mesure du temps par les horloges,* Tome I., A Paris An X. S. 90. 13) *Libri,* Tome IV. S. 284. 14) *Carové, Galileo Galilei.* Zu seinem Gedächtniss im zweiten Säkularjahre seines Todes, Siegen und Wiesbaden 1842. S. 96.

§. 6. Die erste Idee eines vervollkommneten Zeitmessers findet sich in einem Briefe Galilei's an den Venetianischen Mönch Micanzio ausgesprochen, dessen Gesammtinhalt der Herausgeber der Galilei'schen Werke mit den Worten signalisirt[15]): *„Parla della sua imminente totale cecità, e dei lavori scientifici che ciò non ostante, anzi a conforto della infermità, va conducendo"*. Nach den Eingangsworten heisst es in diesem Schreiben*) (a. a. O.): *„E pur ora sono interno al distendere un catalogo delle più importanti operazioni Astronomiche, le quali riduco ad una precisione tanto esquisita, che mercè della qualità degli stromenti per le osservazioni della vista, e per quelli, co' quali misuro il tempo, conseguisco precisioni sottilissime quanto alla misura non solamente di gradi e minuti primi, ma di secondi, e terzi, e quarti ancora, e quanto a' tempi parimente esattamente si hanno le ore, minuti primi, secondi, e terzi, e più, se più ne piace; mercè della quali invenzioni si ottengono nella scienza Astronomica quelle certezze, che sin ora co' mezzi consueti non si sono conseguite; ed a suo tempo la P. V. Reverendiss. non sarà la seconda ab averne parte"*. Ueber die Ausführung dieser vielsagenden Idee erfahren wir zunächst hier noch nichts; jedoch finden wir die Aufklärung schon in einem mehrere Monate vorher abgefassten Briefe an den holländischen Admiral Realis.

Galilei stand um jene Zeit in Korrespondenz mit den Generalstaaten, welche von dem Genie des grossen Naturforschers für die Lösung des ihre merkantilen Interessen so nahe berührenden Problemes der Meereslänge zu profitiren hofften. Eine genau gehende und sicher zeigende Uhr war hierzu erstes Bedingniss; nachdem also Galilei von der Beobachtung der Jupiterstrabanten durch gute Fernröhre ge-

*) Wir hatten in unserer oben (§. 1.) erwähnten Abhandlung Zöllner in Leipzig das Verdienst zuerkannt, die in der Korrespondenz Galilei's enthaltenen Angaben in Erinnerung gebracht zu haben. Ist diess auch nur *cum grano salis* zu verstehen, so dürfte das betreffende Buch[16]) doch immerhin das einzige unserer neueren deutschen Literatur sein, welches diesem geschichtlichen Faktum gerecht wird. Beiläufig sei bemerkt, dass jener Herr nicht mit dem berühmten Astrophysiker ein und dieselbe Person ist.

15) *Le Opere di Galileo Galilei*, Tomo VII. Firenze 1848. S. 193. 16) *Zöllner*, Die Kräfte der Natur und ihre Bedeutung. Eine physikalische Technologie, Leipzig und Berlin 1872. S. 82.

sprochen, wendet er sich zu seinem neuen Zeitmesser[17]). Die Genauigkeit, mit welcher dieses Instrument beliebig kleine Zeittheile anzugeben vermöge, sei ungeheuer, und zudem lasse sich demselben eine so präzise Einrichtung ertheilen, dass 4 oder 6 Exemplare gar nicht in ihren Angaben differirten. Die theoretische Grundlage ist durch das bekannte Theorem gebildet, dass in einem senkrecht gestellten Kreise alle vom tiefsten Punkte auslaufende Sehnen (als schiefe Ebenen gegedacht) in gleicher Zeit durchlaufen werden. Diese Thatsache soll dann auch den Isochronismus der Pendelschwingungen erklären, was bekanntlich nicht streng richtig ist, für's Erste aber wohl angehen mochte.

Es folgt die Beschreibung der Vorrichtung selbst[18]): *„Da questo verissimo e stabile principio traggo io la struttura del mio numeratore del tempo, servendomi non d'un peso pendente da un filo, ma di un pendulo di materia solida e grave, qual sarebbe ottone o rame; il qual pendulo fo in forma di settore di cerchio di dodici o quindici gradi, il cui semidiametro sia due o tre palmi; e quanto maggiore sarà, con tanto minor tedio se gli potrà assistere. Questo tal settore fo più grosso nel semidiametro di mezzo, andandolo assottigliando verso i lati estremi, dove fo che termini in una linea assai tagliente, per evitare quanto si possa l'impedimento dell' aria, che sola lo va ritardando. Questo è perforato nel centro, pel quale passa un ferretto in forma di quelli sopra i quali si voltano le stadere; il qual ferretto terminando nella parte di sotto in un angolo, e possando sopra due sostegni di bronzo, acciò meno consumino pel lungo muovergli il settore, rimosso esso settore per molti gradi dallo stato perpendicolare (quando sia bene bilicato) prima che fermi anderà reciprocando di qua e di là numero grandissimo di vibrazioni, le quali per poter andare continuando secondo il bisogno, converrà che chi gli assiste, gli dia a tempo un impulso gagliardo, riducendolo alle vibrazioni ample"*.

Von einem Fortschritt gegen die oben besprochene hypothetische älteste Form der Vorrichtung kann offenbar nur in untergeordneten Dingen die Rede sein. Die Mittel, durch welche Galilei den von ihm wohl erkannten Einfluss des widerstehenden Mediums zu kompensiren betrebt ist, sind sehr glücklich gewählt, aber in der Hauptsache hat sich nichts

17) *Le Opere* etc. Tomo VII. S. 168. 18) *Ibid.* S. 169.

geändert. Sowohl das Zählen, als auch das Inbewegungerhalten muss durch Menschen besorgt werden, also kann von einer Maschine eigentlich noch keine Rede sein.

Diess sah Galilei auch recht wohl ein, und seinem mechanischen Genie fiel es nicht schwer, wenigstens in Einem Punkte Abhülfe zu treffen und ein selbstthätiges Zählwerk an dem Instrumente anzubringen. Er sagt nämlich[19]): „*Per evitar poi il tedio di chi dovesse perpetuamente assistere a numerare le vibrazioni, ci è un assai comodo provvedimento in questo modo; cioè facendo che dal mezzo della circonferenza del settore sporga in fuora un piccolissimo e sotilissimo stiletto, il quale nel passare percuota in una setola fissa in una delle sue estremità, la qual setola posi sopra i denti d'una ruota leggerissima quanto una carta, la quale sia posta in piano orizzontale vicina al pendolo, ed avendo intorno denti a guisa di quelli d'una sega; cioè con uno dei lati posto a squadra sopra il piano della ruota, e l'altro inclinato obliquamente, presti questo officio, che nell' urtare la setoletta nel lato perpendicolare del dente, lo muova, ma nel ritorno poi la medesima setola nel lato obliquo del dente non lo muova altrimenti, ma lo vada strisciando e vada ricadendo a piè del dente susseguente. E così nel passaggio del pendolo si muoverà la ruota per lo spazio d'uno de' suoi denti, ma nel ritorno del pendolo essa ruota non si muoverà punto; onde il suo moto ne riuscirà circolare sempre per l'istesso verso. Ed avendo contrassegnati con numeri i denti, si vedrà ad arbitramento la moltitudine dei denti passati, ed in conseguenza il numero delle vibrazioni e delle particelle del tempo decorse. Si può ancora intorno al centro di questa prima ruota adattarne un'altra di piccolo numero di denti, la quale tocchi un'altra maggior ruota dentata; dal moto della quale potremo apprendere il numero dell' intere revoluzioni della prima ruota, compartendo la moltitudine dei denti in modo, che, per esempio, quando la seconda ruota avrà dato una conversione, la prima ne abbia date 20, 30 o 40 o quante più ne ptacesse: ma il significar questo alle SS. loro, che hanno uomini esquisitissimi ed ingegnosissimi in fabbricare orologi ed altre macchine ammirande, è cose superflua, perchè essi medesimi sopra questo fondamento nuovo di sapere, che il pendolo, muovasi per grandi o per brevi spazj, fa le sue reciprocazioni egualissime, troveranno conseguenze più sottili di quelle che io possa immaginarmi*".

19) *Ibid.* S. 170.

Denken wir uns die Uhr in diesem Sinne konstruirt, so werden wir nicht anstehen dürfen, den Libri'schen Ausspruch, welchen wir in §. 5. anführten, als völlig gerechtfertigt zu bezeichnen. Dass der in dem Briefe an Micanzio erwähnte Zeitmesser mit diesem hier identisch ist, dürfte mehr als wahrscheinlich sein; höchstens könnte man, da derselbe ja aus einer etwas späteren Zeit stammt, auf die Vermuthung kommen, Galilei habe inzwischen noch weitere Verbesserungen ausgedacht. Urkundliche Belege fehlen uns jedoch hierüber gänzlich.

Warum die schöne Idee des grossen Mannes in keinem ausgedehnteren Massstabe von den Holländern realisirt wurde, geht aus dem Briefwechsel nicht mit genügender Klarheit hervor. Vielleicht glaubte man, dass das zarte Instrument auf dem bewegten Meere, wo es doch ganz besonders in Anspruch genommen werden müsste, bald unbrauchbar werden möchte — für diese Auffassung spricht wenigstens eine Stelle eines Briefes, welchen der Amsterdamer Mathematikprofessor Hortensius an Elias Diodati in Paris richtete*). Dort bemerkt er nämlich[20]) zu Galilei's Vorschlag: „*Mensuratorem temporis, quem proponit, non existimo ullum in Mari locum invenire posse, aut certum usum praestare. Nam etsi demus, motum ejus esse uniformem et constantem; quia tamen requiritur aliquid immobile, super quod volvatur, fieri non potest, quin ejus motus aliquantum varietur, si quando cum observatore in machina collocatur, ob continuam navis agitationem, quae dum machinam in aequilibrio sistit, aliquando mensuratoris motum aut impedit, aut adjuvat*". Ansichten, denen eine gewisse Berechtigung nicht abzusprechen sein wird.

§. 7. In wirklichen Gebrauch scheint Galilei's Uhr also nicht gekommen zu sein, und so setzte sich denn wohl bei den meisten Schriftstellern, welche diesen Gegenstand behandeln, die Anschauung fest, dieselbe sei überhaupt nie praktisch ausgeführt worden. Diess ist aber gleichwohl geschehen, und ein Modell seines Instrumentes existirt noch heutzutage in Florenz.

*) Hortensius war einer der Experten der niederländischen Längen-Kommission.

20) *Ibid.* S. 182.

Man hätte sich schon durch eine Notiz des Florentiner Literarhistorikers Nelli eines Besseren belehren lassen sollen, denn derselbe bemerkt ausdrücklich[21]): . . . „*Da ciò, come dice il Viviani nella sua vita colla sagacità del suo ingegno inventò quella semplice, e regolata misura del tempo per mezzo del pendolo non prima da alcun altro avvertita, pigliando occasione di osservarla dal moto d'una lampada, mentre era un giorno, como si è detto, nel Duomo di Pisa: e dipoi coll'andar del tempo, e nella sua età avanzata regnando Ferdinando Secondo fece eseguir questo suo nobile ritrovato da Marco Treffler Orologiaro del predetto Granduca, il quale fabbricò il primo Orivolo a pendolo, il modello di cui dovette andare in Olanda*" . . .

Das Modell, dessen hier gedacht wird, soll nun, wie von einigen Italienern behauptet wird, der holländischen Behörde übersandt und von Huyghens gesehen worden sein. Ob sich diess wirklich so verhält, wollen wir später untersuchen, wenn wir in die Darstellung des Prioritätsstreites zwischen Holland und Italien eintreten; jedenfalls ist so viel sicher:

Das Modell des ersten auf die Pendelschwingungen sich stützenden Zeitmessungs-Instrumentes, welches unter den Augen des Erfinders selbst angefertigt wurde, befindet sich zur Zeit in dem Galilei-Museum zu Florenz.

Von dieser mit wahrer Pietät eingerichteten historischen Musteranstalt hat uns Ch. Martins eine sehr eingehende Beschreibung gegeben[22]), die jedoch leider gerade der Pendeluhr nicht erwähnt. Wohl aber hat van Swinden[23]) eine Abbildung des merkwürdigen Instrumentes geliefert, welche zwar

*) Eine detaillirte Beschreibung der an sich verständlichen Figur, bei welcher grösserer Uebersichtlichkeit halber die Gesetze der Perspektive nicht strenge eingehalten wurden, wird wohl nicht nöthig sein. *ABCD* ist die scharfkantige Pendellinse; das Pendel selbst ist in *E* an einem um die obere Leiste *FG* drehbaren Balkengerüste befestigt. An demselben Balken befindet sich der Dorn *H* (das „*stiletto*" Galilei's), welcher in die äquidistanten Triebstöcke des Stirnrades *J* eingreift und dann durch das Spiel der Zahnräder in bekannter Weise die Uebertragung auf ein Zählwerk möglich macht.

21) *Nelli*, *Saggio di storia letteraria Fiorentina del secolo XVII.*, In Lucca MDCCLIX. S. 73. 22) *Ch. Martins*, Von Spitzbergen zur Sahara, deutsch von Vogt, 2. Abtheil. Jena 1872. S. 164 ff. 23) *Van Swinden*, Tafel II.*)

einen sehr skizzenhaften Charakter trägt, im Ganzen aber, wie wir uns durch Autopsie überzeugten, sehr treu ist. Theils nach dieser Vorlage, theils nach unmittelbarer Anschauung ist in Fig. 1. das Pendelzählwerk Galilei's dargestellt.

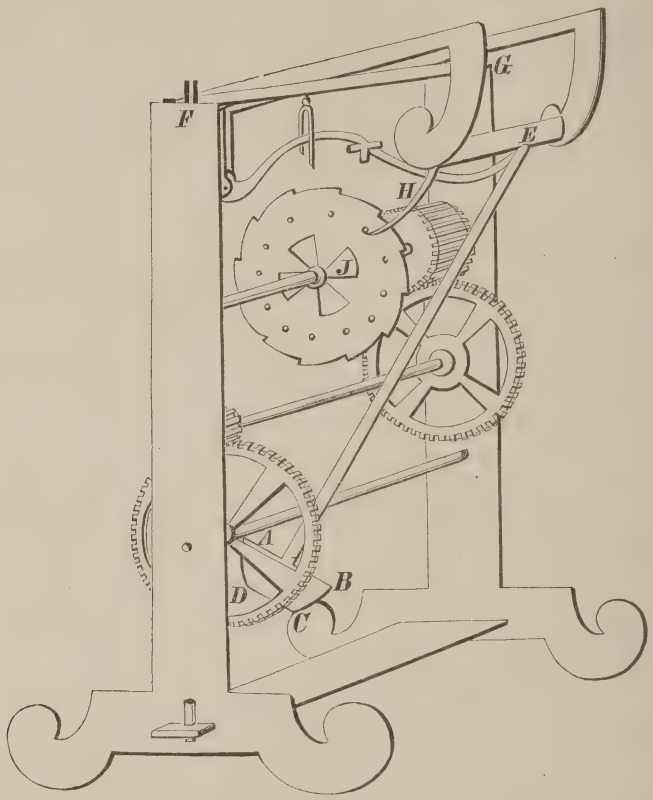


Fig. 1.

§. 8. Was Galilei geleistet hat, geht mit Klarheit aus unserer bisherigen Darstellung hervor; eine Vergleichung seiner Erfindung mit derjenigen von Huyghens behalten wir uns für einen späteren Paragraphen vor.

Allein ein geschichtliches Gerücht vindizirt die Ehre der grossen Neuerung nicht sowohl dem Vater Galilei, als vielmehr dem sonst wenig bekannten Sohne, Vinzenzio Galilei[24]).

24) *Libri*, Tome IV. S. 285.

Dieser Punkt ist es demnach, welcher vor Allem einer Klarstellung bedarf.

Diejenigen Schriftsteller, welche sich in diesem Sinne aussprechen, beziehen sich auf eine Stelle in dem bekannten Werke, in welchem die florentinische „*Accademia del cimento*“ protokollarisch von den physikalischen Versuchen Rechenschaft ablegt, welche ihre Mitglieder angestellt hatten. In dem betreffenden Kapitel[25]) ist von der Nothwendigkeit die Rede, bei gewissen Versuchen, besonders bezüglich der Bewegung von Projektilen und Fortpflanzung des Schalles, die Zeit bis auf sehr kleine Theile genau messen zu können; natürlich dient hiezu das Pendel. Und zwar wird dasselbe zuerst verwandt in der primitiven Gestalt eines freihängenden schweren Körpers, gleich darauf aber wird auch eine Verbesserung angegeben, indem nun, zur Verhütung seitlicher Abweichungen, die bifilare Aufhängung in Vorschlag kommt. Dann aber folgt der Uebergang zur wirklichen Pendeluhr mit den Worten[26]):

„*Qui par luogo di dire, che l'esperienza, c' avea mostrato (come fu anche avvertito di Galileo, dopo l'osservazione, che prima d'ogni altro ei fece intorno all' anno 1583. della loro prossima ugualità) non tutte le vibrazioni del Pendolo correre in tempi precisamente tra loro uguali, ma quelle che di mano in mano s'accostano alla quiete, spedirsi in piu breve tempo che non fanno le prime, come si dirà a suo luogo. Per tanto in quell' esperienze, che richiedono squisitezza maggiore, e che sono di sì lunga osservazione, che le minime disuguaglianze di tali vibrazioni, dopo un gran numero arrivano a farsi sensibili, fu stimato bene applicare il Pendolo all' orivolo, su l'andar di quello, che prima d'ogni altro immaginò il Galileo, e che dell' anno 1649. messe in pratica Vinzenzio Galilei suo figliuolo. Così, è necessitato il Pendolo dalla forza della molla, o del peso a cader sempre dalla medesima altezza; onde con iscambievol beneficio non solamente vengono a perfettamente uguagliarsi i tempi delle vibrazioni, ma eziandio a correggersi in certo modo i difetti degli altri 'ngegni di esso orivolo. Noi per poterci valere d'un tale strumento a diverse esperienze, le quali vogliano il tempo piu, o meno sottilmente diviso, abbiam fatte varie palline di metallo infilzate in sottilissimi fili d'acciaio di diverse lunghezze*

25) *Saggi di naturali esperienze fatte nell' accademia del cimento*, In Firenze MDCLXVII. S. 16 ff. 26) *Ibid.* S. 20.

e tutti da inserirsi nella medesima madrevite secondo l' bisogno. Di questi il piu corto compie la sua intera vibrazione in un mezzo minuto secondo d'ora; che è la piu minuta divisione, che ci sia riuscito di fare: essendochè tutti gli altri piu corti riescono così veloci, che gli occhi non gli posson seguire. E infin qui aver detto di quegli strumenti, che vengono piu speso in uso nelle seguenti esperienze".

In dieser Beschreibung ist besonders der Akzent wichtig, welchen die Akademiker auf den Umstand legen, dass die Oszillationen des Pendels doch nicht in aller Strenge isochron seien und dass also ein Hauptvorzug des Instrumentes darin bestehe, die Linse immer *„dalla medesima altezza"* herabfallen zu machen; jedoch scheint ihre Angabe irrig, dass Galilei selbst diese Thatsache mit der nöthigen Schärfe hervorgehoben habe, obwohl sie ihm selbst natürlich nicht entgangen sein konnte. Was nun das Instrument seines Sohnes anlangt, so reicht das im Texte Beigebrachte in keiner Weise dazu aus, sich eine klare Vorstellung von seiner Einrichtung zu machen. Fig. 2. stellt dasselbe dar, ohne jedoch vom Mechanismus, der offenbar in der Trommel *A* verborgen ist, etwas zu verrathen. Das Zifferblatt ist eigenthümlicherweise in 15 gleiche Theile getheilt; bei *B* ist das Pendel aufgehängt, während der Zapfen *C* in Gemeinschaft mit dem Schlüssel *D*, offenbar zum Aufziehen der Uhr bestimmt ist. Sehen wir nun zu, welche Aufklärung über diese etwas mysteriöse Pendeluhr anderweite Quellen uns gewähren können.

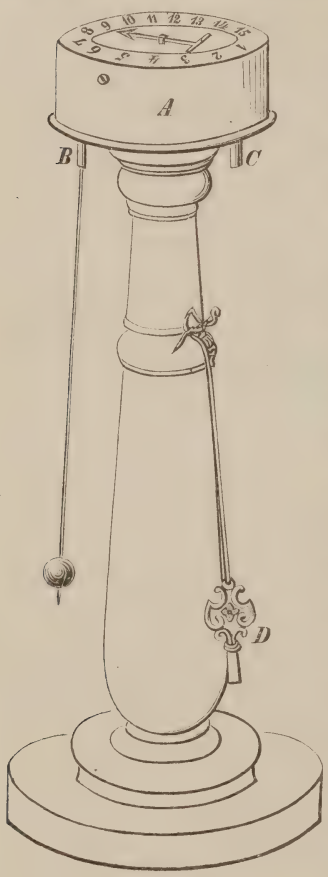


Fig. 2.

Van Swinden, dessen Untersuchungen wie immer mit

grösster Schärfe geführt sind, ist der Ansicht[27]), auf das Zeugniss der Akademie sei gar kein Gewicht zu legen. In der That stammt das Werk, auf welches wir uns stützen, erst aus dem Jahre 1667, wo bereits in ganz Italien Huyghens' Erfindung bekannt und von der Praxis benützt war. Wahrscheinlich, so kalkulirt er, war das Instrument, welches die Florentiner dem jüngeren Galilei aus nationaler Pietät zueigneten, nichts anderes als eine in ihrer äusseren Form einigermassen modifizirte Huyghens'sche Pendeluhr; für die Sache selbst bedarf es älterer Zeugen aus einer Zeit, wo eine Konfundirung der früheren unvollkommenen Werkzeuge mit den importirten Erzeugnissen holländischer Uhrmacherkunst noch nicht hatte stattfinden können.

§. 9. Als Bouillau im Jahre 1658 an den Herzog Leopold von Toskana ein Exemplar des Huyghens'schen Erstlingswerkes gesandt hatte, richtete der Fürst an ihn ein Dankschreiben, worin er die Ehre der Erfindung für Galileo Galilei reklamirt, der dieselbe den Holländern angetragen habe[28]). Aber auch noch später habe er die Idee nicht aufgegeben, Vollkommneres zu leisten: „*E tre anni sono che qua si studio sopra l'issesso sujetto, ne fu fatte uno da un vertuozo che spero riuscera, ridotto la sua fabrica al punto di non minor facilita e giustezza del ritrovato dal sign. Christiano Hugenio*". Mit Recht bemerkt hiezu Van Swinden[29]): Wie sollte ein Mann, der schon 1636 nahezu, drei Jahre darauf aber total blind war, das Modell einer Maschine zusammengesetzt haben, deren Komposition die vollste Kraft des Geistes und der Sinne beanspruchte. Andererseits aber gewinnt durch den Brief des Mediceers die Vermuthung neuen Halt, dass der blinde Vater seine Ideen dem Sohne mitgetheilt und dieser sie zu realisiren versucht habe.

Noch weitere Bekräftigung zieht diese Ansicht aus einem Briefe Guison's an Huyghens vom Jahre 1660[30]) „*On m'a dit à Florence que les Horloges à Pendule y avoient été trouvées dès quelque tems: et même l'on me crayonna grossièrement la figure de celui que Galilée avoit tenté suivant cette invention*". Hier ist klar ausgesprochen, dass Galilei selbst blos den Versuch gemacht habe, sein Zählwerk zu einer wirklichen Uhr umzugestalten — ob es ihm wirklich gelungen, steht dahin.

27) *Van Swinden,* S. 70. 28) *Ibid.* S. 113. 29) *Ibid.* S. 72. 30) *Ibid.* S. 130.

Hören wir jetzt, wie sich Frisi, der gelehrte Lobredner Galilei's, über den Sachverhalt auslässt. Er erwähnt der Arbeiten, welche derselbe noch am Abend seines Lebens ausführte, und fährt dann fort[31]): *„Negli atti dell' Accademia del Cimento si dice veramente, che Vincenzio Galilei nel 1649 applicò il pendolo all' orivolo; e il Bechero attesta inoltre d'averlo inteso dire al Treffler, che ne aveva lavorato la macchina. Ma negli atti stessi s'aggiunge che il pendolo dell' Accademia era sull' andar di quello, che immaginò il Galileo: e il Galileo non avera ritrovato nulla che s' accostasse all' invenzion d' Ugenio"*. Frisi hebt — was bei dem ausgesprochenen Zweck seiner Arbeit doppelt in's Gewicht fällt — es hervor, dass Galilei's Instrument, wie es im Jahre 1649 durch seinen Sohn an die Oeffentlichkeit gebracht worden sei, nur als eine erste Annäherung zu betrachten gewesen sei, und auch der schon genannte Prinz Leopold tritt in einem späteren Schreiben an Huyghens dieser Auffassung bei, ja es scheint sogar nicht sicher, ob Vincenzio's Leistung sich über einen blossen Papier-Entwurf erhoben, ob er nach seiner Zeichnung ein wirkliches Modell verfertigt habe.

Van Swinden glaubt alle weiteren Einwürfe an dieser Stelle dadurch niederschlagen zu können, dass er nach bis dahin unbekannten Papieren das Faksimile der Galilei'schen Erfindung beibringt, welches wir bereits besprochen haben[32]). Allein seine Vermuthung, dass derselbe über diesen Brouillon nicht hinausgegangen sei, ist, wie wir sahen (§. 7.), dadurch hinfällig, dass eben wirklich das Modell zu Florenz existirt.

Berücksichtigen wir dieses unumstössliche Faktum, so scheint uns in die ganze etwas dunkle Angelegenheit durch eine einfache und naheliegende Annahme sofort Klarheit gebracht werden zu können. Wir wissen: Galilei selbst war zu der Zeit, wo er mit den Generalstaaten über sein Instrument korrespondirte, wohl kaum mehr fähig, mechanische Arbeiten vorzunehmen, er begnügte sich also wohl, eine ziemlich rohe Zeichnung (dieselbe, die van Swinden nach den Akten wiedergiebt) nach Holland einzusenden. Andererseits war Galilei der Sohn kein selbstständiger wissenschaftlicher

---

31) *Frisi, Elogio del Galileo*, In Milano MDCCLXXV. S. 128 ff. 32) *Van Swinden*, S. 74 ff.

Denker, dem man eine bedeutende Vervollkommnung des väterlichen Entwurfes zutrauen könnte — also ziehen wir den Schluss:

Galileo Galilei hat seine Idee eines Pendel-Zeitmessinstrumentes nicht mehr selbst realisirt; er hat sich vielmehr begnügt, Beschreibung und Zeichnung desselben seinem Sohne Vincenz mitzutheilen. Derselbe hat dann nach diesen Anweisungen — vielleicht mit einigen unwesentlichen Verbesserungen — im Jahre 1649 ein Modell angefertigt, welches das zur Zeit in der Galilei-Tribüne zu Florenz befindliche ist.

Ist diese Deutung, wie wir zu vermuthen allen Grund haben, die richtige, so wäre auch die Notiz von Poggendorff[33]) entsprechend zu modifiziren, wonach Vincenz mit der Konstruktion einer Pendeluhr nicht zu Stande gekommen wäre. Erreicht hat er vielmehr sein Ziel allerdings, allein er hatte von vornherein kein so hohes im Auge, als man bisher annahm — er wollte nur der väterlichen Weisung gerecht werden.

§. 10. Ehe wir weitergehen, müssen wir noch die etwas mysteriöse Angabe Becher's aufzuklären suchen, welche mit unseren bisherigen Ausführungen in Widerspruch zu stehen scheint. Hiernach nämlich wurden Pendeluhren in Italien erst dann verfertigt, als man das Rezept aus Holland beziehen konnte, die von der *Accademia del cimento* abgebildete Uhr gehört in diese Kategorie, und die unvollkommenen Versuche der beiden Galilei fanden keine Nachahmung. Dem tritt Becher, der berühmte und berüchtigte Chemiker, mit den Worten[34]) entgegen: *„Inventionem et introductionem illorum“ — horologiorum — „Hugenius à Zulichem Hollandus sibi vendicat, edita de ejusmodi Horologiorum structura et ratione deductione ad DDnn. Status Hollandicos, à quibus privilegium obinde obtinuit; deinde ad Regem Galliae, unde stipendium meretur; sed contradicit ipsi comes Magalotti, Magni Hetruriae ducis ad Aulam Caesaris Residens, qui totam mihi hujus Horologii Historiam oretenus recensuit, quam triennio circiter elapso mihi Augustae Vindelicorum, defuncti Magni Ducis Hetruriae, hujus Patris Horologiarius nomine*

33) *Poggendorff*, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 1. Band, Leipzig 1860. S. 824.
34) *Becher, De nova temporis dimetiendi ratione, et accurata horologiorum constructione, theoria et experientia,* Londini 1680. S. 7 ff.

Trifler similem narravit, et confessus est, se Magni Ducis jussu, et ejus Mathematici Galilaei à Galilaeis instinctu primum Florentiae Horologium pendulum confecisse, cujus exemplar in Hollandiam venit".

Mit Recht erklärt es van Swinden[35]) verwunderlich, dass hier von Vincenz Galilei gar keine Rede sei. Denn von dessen Bemühungen musste Treffler, der mit ihm in der gleichen Stadt lebte, doch nothwendig Kenntniss gehabt haben, aber noch mehr: wir haben positive Belege dafür, dass beide Männer zusammen gearbeitet haben. Eine solche Belegstelle, von Nelli herrührend, haben wir bereits oben (§. 7.) angeführt; eine andere findet sich bei Frisi, welchen wir im vorigen Paragraphen zitirten. Derselbe fährt an der Stelle, wo wir damals der Deutlichkeit halber abbrechen mussten, folgendermassen fort: *„Di più si trova ivi disegnata la macchina del 1649, e quel disegno non ha che fare coll' altro, che s'è trovato tra li scritti del Viviani col nome di Giovanni Filippo Treffler d' Augusta".* Ferner besass die Universität Pisa noch am Ausgang des vorigen Jahrhunderts ein Uhr-Modell, welches nach Aussage Perelli's, des dortigen Mathematiklehrers, von Treffler unter Aufsicht des jüngeren Galilei verfertigt worden wäre[36]). Es soll dieses Instrument durch Erbschaft von Viviani an seinen damaligen Aufbewahrungsort gelangt sein[37]).

Da könnte man nun vielleicht zuerst auf den Gedanken kommen, diess von Perelli beschriebene Instrument sei kein anderes, als das jetzt in Florenz befindliche Original. So plausibel diess erscheint, so spricht doch dagegen das Wenige, was wir über die Beschaffenheit desselben aus einer Notiz von Tiraboschi[38]) entnehmen: *„Il mecanismo pero ne è al un poco differente dell ugeniano, perche il motore del primo, in vece di un peso, ha una molla", alcui dopo sono stato aggiunto duo laminetti cicloidale".* Nun glaubt freilich Brenna[39]), man habe diese zykloidischen „Anhängsel" erst bei einer viel späteren Gelegenheit dem alten Modell angefügt, aber viel wahrscheinlicher dünkt uns die Vermuthung van Swinden's[40]), man habe es hier mit einer einfachen Nachahmung eines Huyghens'schen

35) *Van Swinden*, S. 79. 36) *Perelli, Giornale letteraria di Pisa*, Tome II. S. 234. 37) *Van Swinden*, S. 82. 38) *Ibid.* S. 81. 39) *Brenna in Fabroni, Vitae Italorum*, Pisis 1778. Tom. I. S. 77. 40) *Van Swinden*, S. 83.

Vorbildes zu thun. Auch noch andere Gründe führt unser holländischer Gewährsmann an; zuletzt kommt er auf das Zeugniss Viviani's zu sprechen, welches derselbe in einem Briefe an Magalotti*) abgelegt haben soll. Allein von Treffler erwähnt derselbe gar nichts, und auch, was er von Galilei's Projekten mittheilt, bringt für uns nichts Neues bei. Wir glauben somit im Anschluss an van Swinden unser Urtheil dahin zusammenfassen zu dürfen:

Die Nachricht, dass Treffler zusammen mit Galilei eine Pendeluhr angefertigt habe, kann so gedeutet werden, als habe ersterer einfach das bekannte mehrfach erwähnte Florentiner Modell nach Vinzentius' Zeichnungen zusammengesetzt; wahrscheinlicher aber ist es, dass eine wirkliche von Treffler nach niederländischem Muster konstruirte Pendeluhr mit leicht begreiflicher National-Eitelkeit ohne weiteres den beiden Galilei zugeschrieben wurde.

§. 11. Die bisher von uns erörterten und wohl auch erledigten Fragen bezogen sich im Wesentlichen alle auf die Prioritätsrechte Galilei's beziehungsweise seines Sohnes. Wir sind zwar schon dahin gelangt, uns ein abschliessendes Urtheil bilden zu können, wollen aber doch nicht versäumen, einige andere Stimmen zu hören. Wir befolgen dabei keine systematische Ordnung, sondern ziehen ganz einfach nach einander alle Quellen zu Rathe, die uns einigen Aufschluss gewähren können.

Hier ist zuvörderst zu nennen ein Brief des nun schon mehrfach genannten Prinzen Leopold an Michel Angelo Ricci. Es heisst daselbst[43]) „*L'invenzione di trovare la longi-*

*) Wir haben den betreffenden Brief Viviani's in der uns zu Gebote stehenden Briefsammlung Magalotti's[41]) nicht auffinden können, und müssen demzufolge Tiraboschi's Zitat für unrichtig halten. Von allgemein wissenschaftlichem Interesse ist, beiläufig bemerkt, der 16. Brief, wo von Galilei's Anschauungen über das Unendliche gesprochen wird und u. A. die Stelle[42]) vorkommt: „*I Cerchi divertan linee rette*". Wir wissen nicht, ob diese Auffassung der geraden Linie als eines Kreises von unendlich grossem Radius irgendwo vorher nachzuweisen ist, glauben aber, dass Galilei's mathematisch-philosophische Betrachtungen bei weitem noch nicht genug gewürdigt worden sind.

41) *Lettere familiari del Conte Lorenzo Magalotti*, Parte prima, In Venezia MDCCXIX. 42) *Ibid.* S. 254. 43) *Lettere inedite di uomini illustri*, In Firenze MDCCLXXIII. Tomo I. S. 130.

tudine con il pendolo teoricamente ancora fu trovata dal Sig. Galileo; ma il trovare il modo che il pendolo si adopri in mare senza la perturbazione del moto che dovrebbe avere uniforme a voler conseguire l'intento, questo non è stato trovato, e lo tengo per difficile, onde bellissima sarà l'invenzione, se praticabile l'avrà riconosciuta il Sig. Ugenio. Se VS. si compiacerà farmi parte d'uno di que' libretti del Sig. Pietro Guissoni mi sarà carissimo".

Im Gegensatz zu seiner früheren hyperenthusiastischen Voreingenommenheit für seinen berühmten Landsmann, welche uns noch in seinem Briefe an Bouillau (s. o. §. 9.) entgegentrat, sehen wir hier den geistreichen Fürsten bereits auf dem richtigen Wege.

Anders freilich dachten andere Italiener. So sagt Targioni-Tozzetti[44]): „*Fra i vantaggi che risultavano al Genere Umano dai Collegij, che si degnava il Granduca tenere col Galileo, non fu il minimo quello dell' Invenzione dell' Orivolo a Pendolo, avanti al 1633; messa dipoi in pratica da Vincenzio suo Figlivolo fino del 1649*". Als Beweis muss wiederum die Erzählung des ohnehin etwas obskuren Treffler dienen. In dem nämlichen Werke heisst es an einer anderen Stelle[45]): „*L'invenzione dell' Orivolo a Pendolo, di cui trattai cap. 100, viene più chiaramente assicurato al Galileo, dal sequente passo di lettera di Nicolo Heinsio scritto a Carlo Dati*". Wie sehr das Auge dessen, der diese Worte niederschrieb, von Lokalpatriotismus umflort gewesen sein muss, wird dem Unbefangenen sofort klar, wenn er den authentischen Wortlaut jenes Schreibens dagegen hält[46]): „*Convenit me diebus proximis elapsis Christianus Hugenius, et narravit accepisse se Lutetia literas, quae inventum Horologii a se editi Galilaeo vestro vindicarent, sancte testatus ejus rei cum ignarissimis ignarum se fuisse. Quod si ita res se habet, ea, qua par est ingenuitate puto agnoscet, et profitebitur hujus inventi gloriam primo Galileo deberi*". Daraus lässt sich doch höchstens ein günstiger Schluss auf Huyghens' persönliche Ehrenhaftigkeit, nicht aber auf die Prioritätsfrage machen.

Hiemit wären wir denn in den heftigen literarischen Kampf

---

44) *Targioni-Tozzetti, Atti e memorie inedite dell' accademia del cimento e notizie aneddote dei progressi delle scienze in Toscana*, Tomo I. In Firenze MDCCLXXX. S. 100. 45) *Ibid.* S. 516. 46) *Clarorum Belgarum ad Ant. Magliabechium nonnullosque alios epistolae*, Tomus I., Florentiae MDCCXLV. S. 235 ff.

hineingekommen, welcher sich sozusagen zwischen den Manen Galilei's einer- und Huyghens andererseits abspielte und schon durch diess sonderbare Verhältniss einen ganz eigenthümlichen Stempel aufgedrückt erhielt*). Zahlreiche Einzelheiten, welche in einer zusammenhängenden Darstellung dieses interessanten Debattirens ihren Platz finden müssen, finden sich bereits im Vorstehenden da und dort eingestreut; diese selbst aber kann bei Van Swinden in aller nur wünschbaren Vollständigkeit nachgesehen werden. Das Interesse jedoch, welches sie bietet, ist mehr ein literarhistorisches; für die Sache selbst glauben wir alles erforderliche Material zusammengebracht zu haben, und halten uns für berechtigt, eine endgültige Entscheidung zu treffen. Dieselbe würde in nachstehender Weise zu formuliren sein:

Die Leistung Galileo Galilei's bestand darin, ein gewöhnliches Pendel mit einem Zählwerk in Verbindung zu setzen. Praktisch ausgeführt hat er dasselbe wohl kaum, vielmehr gebührt das Verdienst, diess gethan zu haben, seinem Sohne Vincenz, der dabei möglicherweise vom grossherzoglichen Hofmechaniker Treffler unterstützt ward. Der schwache Punkt des ursprünglichen Galilei'schen Entwurfes jedoch, darin bestehend, dass menschliche Beihülfe die Uhr in Gang erhalten musste, war bei diesem ältesten italienischen Modell sicher noch nicht überwunden.

Andererseits scheint es, trotz Van Swinden's gegentheiliger Versicherung, nicht absolut unmöglich, dass Huyghens, bereits von der Idee seiner genialen Erfindung durchdrungen, auf der holländischen Admiralität Galilei's Entwurf gesehen und daraus neue Anregung geschöpft hatte. Allein gerade in dem Punkt, der Huyghens' Meisterschaft kennzeichnet, Ersetzung der menschlichen

*) In einer höchst sonderbaren Weise scheint Littrow den Prioritätsstreit sich zurechtgelegt zu haben, wenn er den Ausspruch thut[47]): „Diese Entdeckung führte bald einen gelehrten Kampf zwischen Galilei und Huyghens herbei, und die Frucht dieses Streites war des letzteren berühmtes Werk: *De Horologio Oscillatorio*. Der zweite Theil beruht auf Wahrheit, denn allerdings waren die Verdächtigungen, die Huyghens entgegentraten, für ihn ein Sporn, seinem vorbereitenden Werk über den Gegenstand ein zweites abschliessendes nachfolgen zu lassen — aber wie wäre es zu denken, dass er, der bei Galilei's Tod dreizehn Jahre zählte, mit jenem selbst in eine Polemik sich eingelassen hätte!

47) *Gehler's* phys. Wörterb. 2. Aufl. 9. Band. S. 1112.

Mitwirkung durch eine Hemmungs-Vorrichtung, konnte er aus jener Vorlage nicht das Geringste entnehmen, und es ergiebt sich das Resultat:

Wenn auch Galilei die Priorität der Idee eines auf das Pendel basirten Zeitmessers gebührt, so kann doch andererseits der Anspruch, welchen Huyghens auf die Erfindung einer wirklichen Pendeluhr hat, von dieser Seite her in keiner Weise alterirt werden.

§. 12. Von einer Seite her, so schlossen wir die bisherige Untersuchung, ist Huyghens' Erfindungsrecht nicht gefährdet; wie aber verhält es sich im übrigen? Diese Frage ist es, welcher wir uns jetzt zuwenden müssen; auch hier geniessen wir des Vortheils, uns auf Van Swinden's Darstellung stützen zu können; aber gerade hier haben auch neuere Forschungen Manches zu Tage gefördert, was ihm noch unbekannt war und seinen Folgerungen als Ergänzung dienen kann.

Wir haben oben (§. 10.) eine Aeusserung Becher's angeführt, welche die Erfindung der Pendeluhren von Huyghens ab auf Treffler beziehungsweise Vincenz Galilei leiten sollte. Allein damit noch nicht zufrieden zieht er das Zeugniss eines gewissen Caspar Doms aus Flandern an, welcher ausgesagt haben soll, *„se Pragae Rudolphi Imperatoris tempore a cel. ejus Mechanico et Horologiario Justo Borgen Horologium vibratorium confectum vidisse"*. Hiemit tritt sonach ein neuer Name auf, der des bekannten genialen Schweizers Jobst Bürgi*), der auch sonst in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften (s. Kap. I. u. II.) so vielfach mit Achtung genannt wird**).

*) Es existirt wohl kaum in der neueren Geschichte eine Persönlichkeit, deren Name so viele Verketzerungen zu erleiden hatte, wie Bürgi — eine Probe davon haben wir soeben selbst gegeben. Nachdem nun Wolf[48]) den bestimmten Nachweis geführt hat, dass alle Schreibweisen wie Borg, Byrg (diese Version hat auch der im Namenschreiben sonst höchst akkurate Hankel[49])) total unrichtig sind, sollten derartige Verstösse nicht mehr vorkommen.

**) Auch in der Erfindungsgeschichte der Logarithmen spielt Bürgi bekanntermassen eine nicht unbedeutende Rolle. Allein die hier und da sich findenden Angaben, denen zufolge er Napier direkt gleichzustellen wäre, dürfte nach der sehr eingehenden Kritik Matzka's[50]) nur be-

48) *Wolf*, Johannes Keppler und Jost Bürgi, Zürich 1872. 49) *Hankel*, S. 377. 50) *Matzka*, Ein kritischer Nachtrag zur Geschichte der Erfindung der Logarithmen, Archiv d. Math. u. Phys. 34. Theil. S. 341.

Diese mehr gelegentliche Aeusserung Becher's scheint zuerst von Bailly aufgegriffen und dann auch nach diesem in Berthoud's bereits zitirtes Werk[51]) übergegangen zu sein. Bailly fährt, nachdem er von Galilei's Pendelinstrument gesprochen, mit Becher's Worten fort[52]): „*dit de plus, qu'un nommé Gaspar Doms, Flamand, et mathématicien de Jean-Philippe de Schonborn, dernier électeur de Mayence, lui avoit raconté qu'au temps de l'empereur Rodolphe (c'est-à-dire vers* 1612*), il avoit vu à Prague une horloge à pendule, faite par le fameux Justus Borgen (Juste Birge), mathématicien et horlogeur de l'Empereur, dont le grand Tycho-Brahé s'est servi dans ses obversations astronomiques*".

Mit Ausnahme der wenigen Belege, die wir soeben vorführten, scheint vor Van Swinden's Zeit die Literatur keine weitere Auskunft über diesen Punkt zu enthalten. Aber auch später blieb man beim Alten, und es möchte schwierig sein, in dem langen Zeitraum 1817—1874 neue Materialien aufzufinden. Es ist das unleugbare Verdienst Wolf's, ein neues Ferment in diese Stagnation gebracht zu haben, und seine Veröffentlichungen gewinnen ein um so höheres Interesse, als er im Gegensatze zu Van Swinden's negativem Resultat die erste Konstruktion der Pendeluhr für seinen Landsmann vindiziren zu können glaubt. Wir wollen zuerst einen Ueberblick über Wolf's Untersuchung geben, dann aber auch seinem Gegner gerecht zu werden suchen*).

§. 13. Die Bibliothek zu Kassel besitzt eine Anzahl Handschriften, welche von Rothmann, dem Hof-Mathematiker des astronomischen Landgrafen Wilhelm V., herrühren; dieselben waren zwar theilweise bereits früher beschrieben, aber erst

---

dingte Richtigkeit behalten; leider scheint diese schöne Abhandlung nicht sehr bekannt zu sein.

*) In unserer ersten Arbeit[53]) glaubten wir uns rückhaltslos zu Wolf's Ansichten bekennen zu dürfen, da uns damals Van Swinden's erschöpfende Untersuchung noch nicht bekannt war. Das Nachfolgende wird indess ergeben, dass des letzteren Umsicht hinlängliche Mittel zusammenbrachte, um selbst manche der von Wolf ganz neu aufgefundenen Beweisstücke zu entkräften.

---

51) *Berthoud*, Tome I. S. 96 ff. 52) *Bailly, Histoire de l'Astronomie moderne* Tome I., Paris 1785. S. 372 ff. 53) *Günther*, S. 22.

Wolf hat dieselben, gelegentlich seiner Vorstudien zu der ihm übertragenen Geschichte der Astronomie, einer gründlichen wissenschaftlichen Durchmusterung unterzogen. In einem dieser Manuskripte nun findet sich ein Kapitel, welches den Titel trägt: *„Descriptio Instrumentorum, quibus ad nostras obversationes usi sumus"*. Hier beschreibt Rothmann zuerst die Winkelmess-Instrumente, dann wendet er sich zu den Zeitmessern und fährt (nach Wolf's Uebersetzung[54])) fort: „Was nun aber unsere Uhren anbelangt, deren wir zu unseren Beobachtungen drei zur Hand haben, so wäre es zu weitläufig und mühsam dieselben zu beschreiben. Das aber wenigstens müssen wir erwähnen, dass die erste Uhr mittelst ihrer drei Zeiger nicht nur die einzelnen Stunden und Minuten, sondern auch die einzelnen Sekunden angiebt. Die Dauer einer Sekunde ist nicht so sehr kurz, sondern kommt der Dauer der kleinsten Note in einem mässig langsamen Liede gleich. Die Unruhe (oder der Balancier) wird nicht auf gewöhnliche, sondern auf ganz besondere, neu erfundene Weise so getrieben, dass jede ihrer Bewegungen einer einzelnen Sekunde entspricht *(„Libramentum est seu (si germanica vox graece reddenda est) ἄπαυμα non vulgari sed singulari et noviter invento modo hinc inde impellitur, singulumque ejus momentum exprimit secundum minutum")*. Auch diess ist sehr eigenthümlich, dass, wenn der Sekundenzeiger mit der Hand bewegt wird, sich auch zugleich Minuten- und Stundenzeiger um den betreffenden Betrag verschieben; das gleiche ist der Fall, wenn der Minutenzeiger bewegt wird, während bei Bewegung des Stundenzeigers die übrigen Zeiger an ihren Orten verbleiben. Der Sekundenzeiger hat auch einen eigenen Platz, während die beiden übrigen von demselben Zentrum ausgehen".

Wolf hält nun dafür, dass mit dieser Beschreibung doch wohl nur eine Pendeluhr gemeint sein könne, und bedauert nur, dass Rothmann aus Mangel an technischen Kenntnissen den eigentlichen Mechanismus nicht genauer angegeben habe. Indessen könne kein Zweifel bestehen, was man sich darunter zu denken habe, ja es müsse sogar Bürgi als der erste Entdecker des Synchronismus der Pendelschwingungen angesehen

54) *Wolf*, Astronomische Mittheilungen, Vierteljahrsschr. d. Züricher naturf. Gesellsch., Jahrg. 1873. S. 102.

werden*). Diesem Beweisgrund glaubt dann Wolf einen zweiten noch gewichtigeren zur Seite stellen zu können; er setzte sich nämlich mit Professor Weiss in Wien in Verbindung, um durch seine Mitwirkung über eine angeblich von Bürgi herrührende Uhr dortselbst Auskunft zu erhalten. Derselbe überzeugte sich nun allerdings, dass dieses Instrument keine Pendeluhr sei, machte dabei aber eine andere interessante Wahrnehmung, über welche wir seinen eigenen Bericht hören wollen[56]: „Es enthält die Schatzkammer ausser der oben erwähnten Kunstuhr von Bürgi noch zwei andere: die eine sehr ähnlich gebaut (nur nicht so komplizirt, da sie einfach Stunden und Minuten zeigt, und erstere und Viertel schlägt) von Sneeberger in Prag aus dem Jahre 1606 (also wohl unter Bürgi's Aegide gemacht), — die zweite, welche in der Ornamentik der Sneeberger'schen fast gleichkommt, aber an der Unruhe ein vollkommenes kleines Pendel angebracht hat, dessen Linse sogar verschiebbar ist. Leider ist, soweit ich bis jetzt ermitteln konnte, weder Verfertiger noch Jahreszahl genannt und auch aus dem Inventar der Schatzkammer nichts darüber zu ermitteln: für mich jedoch existirt, dem ganzen Charakter der drei Uhren gemäss, kein Zweifel, dass sie alle aus einer und derselben Zeit, nämlich jener, zu der Bürgi in Prag weilte, stammen".

Gestützt auf diese Thatsachen erklärt Wolf den Toggenburger Mechaniker für denjenigen, der zuerst eine Pendeluhr wirklich konstruirte, ohne dass dadurch der Ruhm Huyghens' als selbstständigen Wiedererfinders und Verbesserers beeinträchtigt würde. Der auf den ersten Blick etwas auffällig erscheinende Umstand, dass Bürgi von einer so bahnbrechenden Neuerung nicht die mindeste literarische Nachricht gegeben,

*) Es wurde von uns bei einer anderen Gelegenheit[55]) darauf hingewiesen, dass Caramuel v. Lobkowitz des Isochronismus Erwähnung thut, ohne einen anderen Autor zu nennen; zugleich merkt er — ein Zeichen für seine auch sonst hervortretende Treue im Beobachten — an, dass diess nicht allgemein, sondern nur für Amplituden $\leq 30^0$ gelte. Hatte er erstere Thatsache selbst gefunden, oder scheute er sich als hoher Kirchenfürst, das Verdienst des Ketzers Galilei anzuerkennen?

55) *Günther*, Die Vorgeschichte des Foucault'schen Pendelversuchs, Sitzungsber. d. Erlanger phys.-med. Sozietät, 5. Heft. S. 62. 56) *Wolf*, S. 104.

wird sehr plausibel dargelegt: Einmal habe derselbe, wie ja auch aus seiner Stellung zu seinen rein wissenschaftlichen Leistungen hervorgehe, sich nicht gern in dem Getriebe der Publizistik bewegt, andererseits habe sich ihm, der eben doch vorzugsweise praktischer Geschäftsmann war, die viel natürlichere Gelegenheit dargeboten, durch Verschleiss seiner Pendeluhren unmittelbar deren allgemeines Bekanntwerden zu bewirken.

§. 14. Van Swinden richtet seinen Angriff zuerst gegen die Hereinziehung Tycho de Brahe's. Sehr berechtigt ist sein Skeptizismus in dieser Hinsicht; denn wer kann im Ernste glauben, dass der Mann, dem die gewaltige Ueberlegenheit der Pendeluhren doch gewiss klarer sein musste als irgend Jemand sonst, und der noch dazu seine Methoden und Instrumente besonders in den Vordergrund zu stellen liebte, von dieser eminenten Erfindung ganz geschwiegen haben soll. Wer nur einigermassen Tycho's Charakter kennt, wird bezüglich der von ihm verwandten Uhr van Swinden's[57]) Urtheil unterschreiben müssen: *„Er kan derhelve in dien tijd geen Slinger-Uurverk gezien geweest zijn"*.

Doch diess ist nur ein sekundärer Punkt. Was nun die Hauptfrage anlangt, so macht Van Swinden vier Annahmen, welche alle möglichst für die Priorität Bürgi's sprechen. Es sind die folgenden: Caspar Doms hat wirklich eine Pendeluhr zu Prag gesehen, welche der Ueberlieferung zufolge von Bürgi herrührte; dass diess zur Zeit Kaiser Rudolph's II. geschehen, ist dann leicht zuzugeben. All das soll sich wirklich so verhalten: *„Maar daaruit volgt niet dat het er reeds eenen had, toen het gemaakt is worden"*[58]).

Um dieses Urtheil zu begründen, macht Van Swinden auf ein historisches Faktum aufmerksam, welches — sonst ganz unbemerkt geblieben — an sich betrachtet sehr glaublich erscheint, von ihm jedoch, wie nicht anders zu erwarten, diplomatisch streng festgestellt wird.

Die Uhrmacher des siebzehnten Jahrhunderts hatten die Gewohnheit, aus älteren Uhrwerken, ohne deren Aufschrift irgendwie zu ändern, die Unruhe herauszunehmen und sie durch ein Pendel zu ersetzen.

Dass dem wirklich so war, erhellt u. A. aus einer eigen-

57) *Van Swinden*, S. 87. 58) *Ibid.* S. 82.

händigen Aufzeichnung Huyghens', welche sich in einem seiner zu Leyden aufbewahrten Manuskripte findet. Er beschreibt dort die von Tycho de Brahe benützten Zeitmesser und fährt fort[59]): „*Pendulorum nulla mentio. Horologio Dr. Kragii, Danici legati, inscriptus est Annus* 1576 *si bene memini. Quod si illo jam tempore Penduli usum reperisset Tycho, quì fieri potuisset ut toto* 24 *annorum spatio qui postea vixit (obiit enim Anno* 1600*) *mense Octobri) nullum in suis scriptis inventi tam egregii tamque exoptati mentionem fecerit. Itaque existimo D. Kragii Horologio Tychonico Pendulum postea adjunctum, idque ex industriâ, ut videretur jam olim ita fabricatum esse*". Zu dieser Vermuthung fügt er dann die Bestätigung: „*Atque ita se habere testatus est cl. Romerus, cum e Dania Hagam Comitis venisset, ac se certo scire quando ita immutatum fuerit*".

Auch noch an einer anderen Stelle seiner Aufzeichnungen kommt Huyghens auf den Gegenstand zurück; wir geben dieselbe hier wörtlich wieder, da sie ausser einer Bestätigung des Gesagten eine konzise Geschichte der ganzen Prioritätsfrage darbietet. Er sagt[60]): „*De Horologio Oscillatorio. Quomodo primum inventum ex hodometro? Conatus plurium praeripere cupientium, ut in Experimentis Florentinis. Post nostrum libellum in Italiam demissum figuras per Bullialdum Cardinali Mediceo missas: quarum Galilei alteram; sed difficili machinatione, ut non mirum non suscepisse. Hevelius sibi occoepit. Germanus quidam Ciniflo*" — damit wird auf den Scheidekünstler Becher angespielt — „*volebat Tychonem Brahé mihi praeïvisse. Danus Legatus Craghe habebat vetus Horologium, nequaquam affabre elaboratum, cui Pendulum inerat, et contenderat ita olim fabricatum fuisse. Sed et Roemerus, qui hìc iter tum forte habebat, fraudem coarguit, optime se meminisse dicens a quo et quando Pendulum illud ipsum appensum fuerit*".

§. 15. Wollte man vielleicht auch geneigt sein, in Huyghens' eigenen Worten eine *oratio pro domo* zu erblicken, so genügt doch sicher das von ihm beigebrachte Zeugniss eines in jeder Beziehung so hoch stehenden Mannes, wie Olav Roemer, um

*) Hier irrt sich Huyghens ein wenig; Tycho starb am 13. Oktober 1601.

59) *Van Swinden*, S. 134. 60) *Ibid.* S. 166.

alle Zweifel zu beseitigen. Allein Van Swinden hat noch anderes Beweismaterial zu seiner Verfügung.

Hieher gehört zuvörderst ein Schreiben Bouillau's an Huyghens[61]), in welchem von einer grossen Kunstuhr die Rede ist, welche die Familie Medicis im Jahre 1689 an ihrem Palaste zu Florenz anbringen liess. Aus der gegebenen Beschreibung geht mit Klarheit hervor, dass der Mechanismus der Uhr kein *a priori* planmässig festgestellter war, sondern nach und nach Abänderungen erlitt: die ursprünglich projektirte Räderuhr ward in eine Pendeluhr umgewandelt. Van Swinden bildet die Vorrichtung auch ab, um zu zeigen, dass das später eingehängte Pendel nicht eigentlich einen integrirenden Bestandtheil der Maschinerie hatte bilden sollen.

Aehnlich muss offenbar auch gedeutet werden, was Carcavi an Huyghens[62]) schreibt: *„Comme j'allois faire faire un Horloge de votre invention, je trouvais un honnête homme d'Angoulême, nommé M. De Bois-Morand, qui m'assura en avoir un chez lui il y a très-longtemp, à-peu-près de la même façon, du moins avec un Pendule, qui fut fait environ l'an* 1615 *ou* 1616 *par un Allemand, pour feu la Reine Marie de Medicis, qu'elle ne prit point point à cause de son départ d'Angoulême: et l'ouvrier s'étant marié et décedé quelque tems après dans la même ville, le Sr. De Bois-Morand l'a retiré de ses héritiers, dont j'ai cru devoir vous donner avis“.*

Auch Leibnitz scheint diesen Kunstgriff der zeitgenössischen Mechaniker wohl gekannt zu haben. Bezeichnend dafür ist seine Bemerkung gegen seinen schottischen Correspondenten Burnet; nachdem er nämlich von den fruchtlosen Anstrengungen derer gesprochen, welche dem grossen Harvey die Ehre seiner Entdeckung (des Blutumlaufes) zu Gunsten Anderer streitig zu machen sich bemühten, fährt er[63]) fort: *„Il en est de même des Pendules: On m'a aussi montré des vieilles Horloges d'Allemagne, apparamment d'une nature approchante de cette Horloge, que vous mandez Monsieur avoir été trouvée dans une mine de Charbon d'Ecosse faite en l'an* 1627. *Il y a meme des livres qui ont objecté cela à M. Huyghens. Mais ce que des artisans ont de cette nature étoit sans le savoir et comme en tatonnant; aussi ces Horloges n'ont jamais été louées ni recherchées pour leur*

61) *Van Swinden*, S. 166. 62) *Ibid.* S. 125. 63) *Ibid.* S. 144.

exactitude. L'Invention de M. Huyghens est une suite des découvertes de Galilée".

Wie verhalten sich nun diesen Zeugnissen gegenüber die Postulate Wolf's. Der erste der beiden Gründe, auf welche er sein Schlussurtheil stützte, kann offenbar an sich nicht als überzeugend gelten, da eben Rothmann nur in sehr oberflächlicher Weise von der neuen Uhr seines Kollegen spricht. Durchschlagende Kraft gewann derselbe erst in Verbindung mit dem zweiten Beweisstück, den wirklich noch vorhandenen Pendeluhren aus Bürgi's Zeit. Allein gerade dieser zweite auf den ersten Blick gewiss unanfechtbar erscheinende Grund scheint uns durch Van Swinden's Recherchen aufs Bedenklichste erschüttert, und wenn wir auch nicht leugnen dürfen, dass durch Wolf's Bemühung die alte Sage*) von Bürgi's Priorität zu einer wissenschaftlich diskutirbaren Streitfrage erhoben wurde, so müssen wir doch sagen:

Es ist zur Zeit absolut nicht festzustellen, ob Bürgi wirklich eine Pendeluhr verfertigt habe; es ist vielmehr wahrscheinlicher, dass es nicht geschah, denn gerade Wolf's Bemerkung, dass an der Unruhe einer von einem Schüler Bürgi's herrührenden Uhr sich ein Pendel angebracht findet, deutet darauf hin, dass man in einer späteren Zeit den älteren Mechanismus durch neuere Erfindungen zeitgemäss zu verbessern bestrebt war.

§. 16. Die primitive Pendelvorrichtung, welche Galilei als Jüngling zu pathologischen Zwecken vorgeschlagen hatte, fand trotz oder vielleicht gerade wegen dieser Einfachheit, welche alle Fehlerquellen ausschloss, bei den praktischen Astronomen grossen Anklang. So berichtet Bailly[65]): *„Les Astronomes se sont servis du pendule simple, pour mesurer avec plus d'exactitude le temps de leur observations, avant même qu'on en eût fait l'application aux horloges. On croit que le fameux Tycho Brahé l'a mis en usage: mais selon Sturmius, Riccioli a été le premier qui se soit servi du pendule pour mesurer le temps:*

*) Berthoud's oben angeführte Erzählung gehört noch ganz dem Bereich des Hörensagens an, und nicht viel besser ist es mit Bode's Nachricht[64]) bestellt: „Byrg kam 1600, also vor Huyghens, auf den Gebrauch der Penduln bei astronomischen Uhren".

64) *Bode*, Astronomisches Jahrbuch von 1816. S. 100. 65) *Bailly*, *Hist. de l'Astr. mod.* Tome II. S. 233.

Langrenius, Vendelin, Mersenne, Kircher, et plusieurs autres) l'ont suivi en cela".*

Angesichts dieser Nachrichten darf man wohl ohne Weiteres vermuthen, dass mancher unter diesen Gelehrten die Mühe, welche das beständige Anstossen und Zählen verursachte, durch Anbringung einer mechanischen Vorrichtung sich zu erleichtern versucht haben müsse. Von all den Genannten wissen wir nichts Bestimmtes; dass es aber geschah, ist nachzuweisen, und zwar ist dieser Versuch geschichtlich um so interessanter, weil er, zu einer anderen Zeit unternommen, höchst wahrscheinlich ebenfalls zur Erfindung der Pendeluhr geführt haben würde.

Der betreffende Astronom ist Johannes Hevel. Verbesserung der Uhren war für ihn eine Lebensfrage, ihr widmete er unausgesetzt seine Aufmerksamkeit. Freilich stand er dabei anfangs auf keinem höheren als dem soeben gekennzeichneten Standpunkte, über den er sich nur langsam und in einzelnen Ansätzen zu erheben vermochte. Uebersichtlich ist dieser Entwickelungsgang von seinem Biographen Westphal[67]) beschrieben worden: „Hevelius verliess die Federuhr ganz und bediente sich vom Jahr 1640 an eines frei schwebenden Pendels, weil er aus Galilei's Gesprächen über das Weltsystem erfahren hatte, dass die Schwingungszeiten eines Pendels gleich wären, es möchten die Bogen gross oder klein sein. Bei einer Mondfinsterniss im Jahre 1649 gebrauchte er z. B. ein Pendel, welches $43^1/_4$ Schwingungen in einer Minute machte; diese Schwingungen wurden von Gehülfen gezählt und aus ihnen konnten, nachdem aus den gemessenen Höhen die wahre Zeit bestimmt war, die einzelnen Momente einer Sonnen- oder Mondfinsterniss hergeleitet werden. Indessen

*) Unter diesen „Anderen" verdient vor Allen Gabriel Mouton genannt zu werden, der in seinem Buche „*De diametris apparentibus Solis et Lunae*" die Oscillationen des Pendels benützte, um aus der Zeit, welche ein grösserer Himmelskörper im Gesichtsfelde verblieb, auf seine scheinbare Grösse zu schliessen. Seine desfallsigen astronomischen Beschäftigungen leiteten ihn auch zur Erfindung neuer und einfacher Summationsmethoden, worin er mit Leibnitz[66]) zusammentraf.

66) *Gerhardt,* Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855. S. 55.
67) *Westphal*, Leben, Studien und Schriften des Astronomen Johann Hevelius, Danzig 1829. S. 61.

was das Zählen der Schwingungen äusserst beschwerlich, und Hevelius brachte deshalb eine Vorrichtung in der Kugel des Pendels an, durch welche auf einem Zifferblatte ein Zeiger die Anzahl der Schwingungen angab". Bei Gelegenheit eines ähnlichen Phaenomens vom Jahre 1654 beschreibt Hevel[68]) selbst sein Verfahren und seine Mittel ganz kurz mit den Worten: „*Horâ verò 1 30", oscillationes perpendiculi, catenulae orichalcicae affixi, numerari coeperunt; quarum 2360 horam integram, et 39$^1/_3$, calculo ritè posito, minutum primum confecerunt.*"

§. 17. Um eben die Zeit, als Hevel mit seinen Versuchen, die Zeitmessung durch das Pendel zu vervollkommnen, zu reussiren begann, trat er mit Huyghens in freundschaftliche literarische Beziehung. Das Problem der Pendeluhr, das beide in hohem Grade interessirte, mag wohl in gegenseitigen Mittheilungen häufig ventilirt worden sein — jedenfalls gelang es des letzteren Genialität zuerst, die vorhandenen Schwierigkeiten zu überwinden. Als er mit seiner Erfindung im Reinen war, beeilte er sich seinem Freunde Nachricht zu geben; als aber auf diese Eröffnung keine Antwort einlief, scheint er ernstlich besorgt zu haben, sein Prioritätsrecht durch Hevel in Frage gestellt zu sehen.

Aehnliches mochten seine anderen Freunde gemuthmasst haben; so schreibt Bouillau, der den wissenschaftlichen Vermittler zwischen Hevel und Huyghens gemacht zu haben scheint, unterm 9. Januar 1660 an diesen letzteren[69]): „*J'ai aujourd'hui écrit en Pologne à M. Des Noyers, secrétaire de la Reine, qui est à Dantzig, où toute la coeur de Pologne se trouve, et je le prie d'avertir M. Hevelius que vous attendez reponse de lui, et que vous vous étonnez de n'en avoir pas receu. Il est très-lent à faire reponse; j'en attend de lui il y a près d'un an*".

Trotz dieser Entschuldigung des wohlmeinenden Bullialdus scheint man im Huyghens'schen Kreise immer gespannter geworden zu sein; als auch spätere aus der Hevel'schen Presse hervorgegangene Schriften die neue Uhr mit Schweigen übergiengen, liess sich Paget aus Dordrecht (29. Oktober 1665) gegen Huyghens vernehmen[70]): „*Miror in*

68) *Johannis Hevelii Dissertatio de nativa Saturni facie, ejusque varietatibus*, Gedani 1656. S. 35. 69) *Van Swinden*, S. 116. 70) *Ibid.* S. 39.

iis quae A.° 1662 edidit Hevelius nullam occurrere Horologii vestri mentionem: forsan in Cometographiâ ejus se compotem factum ejusdemque usu adjutum profitebitur".

Glücklicherweise hatte man sich in Hevel getäuscht. In seinem Hauptwerke, der „*Machina Coelestis*" giebt derselbe von seinen Erfolgen ausführliche Rechenschaft, zugleich aber auch Huyghens die gebührende Ehre. Er sagt zuerst[71]): „*Verùm, nec in his tum temporis acquievi, sed animo tum volvebam, quomodo efficerem, ut dictum Perpèndiculum, quod jam suas oscillationes et numeraret et ostenderet, à potentiâ quâdam vel extrinsecâ, vel intrinsecâ ultrò, absque omni manuum vi atque commotione, posset commoveri: sic enim hocce funependulum multò accuratius et absolutius reddi posse sperabam. Quò autem opus istud eò proclivius, ut putabam, succederet, loco funium, chordarum sive catenularum vectem subtilem chalybeum, haud usque, adeò crassum sex circiter pedes longum adhibui, cui dictum istud machinamentum in inferiori extremitate annexi. Hujus vectis altera extremitas superior super cardinem erat volubilis; ita ut nonnisi in duas plagas Coeli observatas commoveri posset. At caetera pendula saepiùs ad latera deviant, et nunquam fermè eundem semper tenent ductum. Hocce perpendiculum, ex illo vecte chalybeo, et machinamento illo constructum, peculiari artificio eò deducere cogitabam, quò etiam sese ipsum absque ullis manibus, ut modò dicebam, posset commovere, atque in motu continuo detinere; sic ut non solum numerorum oscillationum, sed etiam horas, Min. et Secunda singula ostenderet. At verò, cùm hocce negotium jam ipso opere suscepissem, en ecce, Artifex et Authomathurgus meus, aliàs in suâ arte peritissimus, fato fungitur. Hincque coactus, cùm nonnulla majorum meorum Instrumentorum, utque Quadrantem, Sextantem et Octantem, nondum omnimodò perfecerat, Socium ejus, natione Suecum, hominem Rei Automatariae benè gnarum in domum meam recipere; quò ejus operâ tam dicta Instrumenta, quam istud Perpendiculum feliciter ad finem perducerentur. Isto itaque cum Sueco dictum Perpendiculum resumpsi, quò tandem et se commoveret, et temporum momenta, uti diximus, sponte suâ exactissimè commonstraret. Initio quidem Automatarius ille aegrè admodùm induci poterat (penitùs nempe persuasus, id factu vix esse possibile) ut opus istud susciperet: attamen, cùm id seriò urserim, meisque impensis tentaverim, tandem*

71) *Hevelius, Machinae coelestis pars prior*, Gedani 1673. S. 365.

manus, felicissimo etiam successu, operi admovit, ut in Horologium, absque tamen irrequieto, elatere, pyramide aequatoreâ chordâ huic circumvolutâ vel catenulâ, solo videlicet pendulo, uno pondere, paucisque tantum rotulis dentatio concesserit".

In die eigentliche Praxis trat die Erfindung nicht ein. Denn weiterhin heisst es[72]): *„Eodem ferè tempore, dum ista duo Horologia cum pendulis sub manibus Artificis versabantur, necdùm penitùs erant absoluta (rarius enim Artifici à perficiendis praecipuis Organis Astronomicis illis majoribus, ad consummandum hocce opus vacabat) accidit, ut Celeberrimus et Ingeniosissimus Christianus Hugenius similia Horologia, pariter felicissima ausu, anno 1657 adinvenerit, paullò quoque pòst, anno videlicet 1658 illud ipsum, maximo Rei Literariae bono, delineatum evulgaverit, de quo ipsi maximoperè gratulor. Nam praestantissimum hocce Inventum insigne remedium omnibus nunc Automatis hactenus confectis praebet, atque maximam inaequalitatem earum partem tollit; tam quae in libramentis, quàm axiculis, plumulis atque rotulis delituerunt".*

Fassen wir diese eigenen Angaben Hevel's zusammen, so ergiebt sich uns naturgemäss Nachstehendes:

Hevel hatte, vom gewöhnlichen mathematischen Pendel ausgehend, selbstständig den ersten Schritt gethan, welcher auch den beiden Galilei's bei Konstruktion ihres Zählerwerkes gelungen war. Um überhaupt jede manuelle Beihülfe zu eliminiren, hatte er dann weiter in Gemeinschaft mit seinem Mechaniker umfängliche Vorstudien gemacht, welche denn auch mit Erfolg gekrönt waren und die Konstruktion einer wirklichen Pendeluhr in nächster Zeit erwarten liessen. Allein gerade, als die letzten Schritte zur Erreichung dieses Zieles geschehen sollten, erhielt Hevel die Nachricht, dass in Huyghens' Pendeluhr bereits Alles geleistet sei, was er selbst angestrebt hatte. Daraufhin scheint er das neue Instrument längere Zeit hindurch auf seine praktische Brauchbarkeit geprüft zu haben — daher sein anfängliches Schweigen gegen den Erfinder —, als aber diese Proben günstig ausgefallen waren, stand er nicht an, Huyghens' Vorrechte ohne Rückhalt anzuerkennen.

Im Wesentlichen gleichlautend spricht sich Van Swinden[73]) aus, und dass auch Huyghens selbst so dachte, geht mit Bestimmtheit aus seinen früher (§. 14.) erwähnten Worten hervor *„Hevelius sibi occoepit".*

72) *Ibid.* S. 366. 73) *Van Swinden*, S. 98.

Hiermit sind wir zum Schlusse gelangt. Andere Bewerber um die Ehre der Erfindung, als die bereits genannten, giebt es nicht*). Jedenfalls wird man aus unserer Darstellung über die relativen Verdienste eines Galilei, Bürgi und Hevel gegenüber der vollendeten Leistung des grossen Holländers sich ein unparteiisches Urtheil zu bilden vermögen.

Noten.

I. Zu §. 2. Als Beleg für die Ansicht, dass in der ersten Hälfte des fünfzehnten Jahrhunderts die Uhrmacherkunst immerhin schon eine gewisse Sicherheit erlangt haben müsse, liesse sich die von vielen Autoren uns überlieferte Thatsache betrachten, dass Kaiser Karl V. in selbstgewählter Einsamkeit zwei Uhren zu gleichem Gange zu bringen versucht und aus der Unmöglichkeit, diess zu vollbringen, sich eine psychologisch-politische Nutzanwendung abstrahirt habe. In manchen uns zu Gesicht gekommenen Darstellungen, z. B. in dem bekannten Werke von Duller, wird der kaiserliche Eremit sogar mit Pendeluhren abgebildet, was freilich nach unseren Ergebnissen als ein fast komischer Anachronismus erscheinen muss.

Interessant ist es, dass jene symbolische Vergleichung von Uhren und Menschenseelen erst seit Erfindung der Pendeluhr bewusst auftritt. In einem interessanten historischen Essai[77]), der nur eigenthümlicherweise des Kaisers Karl gar keine Erwähnung thut, hat nämlich Berthold nachgewiesen, dass diess Bild zuerst bei Descartes, in dem uns geläufigen Sinne aber bei Geulinx vorkommt. Leibnitz, der ebenfalls darauf zu sprechen kommt, weist sogar direkt auf ein von Huyghens angestelltes Experiment mit sympathetischen Pendeluhren hin.

II. Zu §. 3. Zur Charakterisirung der Leistungen des Sanctorius führen wir das vertrauenswerthe Zeugniss Nelli's an, der selbst wieder auf die Aussage eines Zeitgenossen des berühmten Arztes, Viviani's,

*) Van Swinden[74]) bemerkt allerdings: „*Hook schijnt ook in dien tijd een middel uitgevonden te hebben om de beweging van Slingers bestendig te doen zijn, doch tet was geene toepassing van den Slinger aan een Uurwerk. Velen schijnen roud gedwaald te hebben*". Allein diess scheint sich nur auf die Anbringung der sogenannten Spirale zu beziehen, welche von Einigen[75]) dem Huyghens, von Anderen[76]) dem Robert Hooke zugesprochen wird.

74) *Ibid.* S. 40. 75) *Berthoud,* Tome I. S. 91. 76) *Whewell,* Geschichte der induktiven Wissenschaften, deutsch von Littrow, 2. Theil, Stuttgart 1840. S. 57. 77) *Berthold,* Leibnitz und das Uhrengleichniss, Monatsber. d. kgl. preuss. Akad. d. Wissensch. S. 561 ff.

sich beruft. Nelli schreibt[78]): *Vincenzo Viviani nella vita del Galileo pag. LII. attesta, che il Galileo suo Maestro fu il primo ad osservare nel Pendolo l'Isocronismo de' Tempi, e che avanti ad ogni altri si valesse del medesimo per la Medicina, ad oggetto di misurare la maggiore, o minore velocità de' polsi. Esso non adduce alcun documento, che il primo ad usare il Pendulo denominandolo Pulsilogio, fosse il Santorio, il quale nel suo Libro intitolato „Methodi vitandorum errorum omnium, qui in arte Medica contingunt" stampato per la prima volta in Venezia nel 1603, a carte 109 scrive „Pro qua cognitione exacte et cito comparando instrumentum Pulsilogium invenimus, in quo motus, et quietes arteriae quisque poterit exactissime dimetiri observare, et firma memoria tenere, et inde collationem facere cum pulsibus praeteritarum dierum. Exhibet instrumentum omnes aequalium motuum differentias etc." Dal qual passo si rilevà, che prima di qualunque Autore il Santorio publicò l'uso, che poteva farsi in Medicina del Pendulo. E' bensi da riflettersi, che il Galileo si portò a leggere le Matematiche nello studio di Padova fino dell' anno 1592, e che di quel tempo doveva aver fatta conoscenza coll' istesso Santorio pure Professore di quell' Università. E' comunemente nota l'affabilità del Fiorentino Filosofo, la tenue stima, che faceva delle tante sue scoperte, e la liberalità, colla quale le comunicava ai suoi conoscenti, onde vi sarà almeno una probabilità, che il Santorio avendo sentita dal Galileo narrare questa sua scoperta, se l'appropriasse, e se ne facesse l'Autore, conforme fece del Termometro, l'invenzione del quale, come sarà dimostrato in appresso, appartiene al Divino Galileo. Conviene qui notare, che nella poc' anzi notata opera del Santorio impressa nel 1603, non si parla d'altro strumento, che del Pulsilogio, e per niente si fa menzione del Termometro, onde in quest' anno il Santorio non aveva inscrito nelle sue opere questo strumento, conforme fece succesivamente in quello, che stampò nell' anno 1612. E' ancora da reflettersi, che il Galileo non avendo esercitata la Medicina pratica posa stima aveva fatta della sua scoperta di' valersi del Pendulo, perosservare la maggiore, o minore velocità de' polsi".*

Diese Zeilen sind von der den Verfasser beseelenden Galilei-Verehrung vielleicht etwas gar zu sehr beeinflusst. Soviel aber scheint sicher, dass Sanctorius' Zeitzählwerk eher unvollkommener als vollkommener denn dasjenige Galilei's war und keinenfalls auf den Namen einer Pendeluhr Anspruch machen konnte.

III. Zu §. 6. In unserer Darstellung der Beziehungen zwischen Galilei und der batavischen Republik ist ein Punkt nicht ganz aufgeklärt. Wir erfuhren zwar, dass seine vorläufigen Vorschläge den Beifall der nautischen Experten nicht gefunden hatten, aber trotzdem nimmt dem Anscheine nach die Korrespondenz ein gar zu abruptes Ende. Es ist uns unbekannt, ob dieser Punkt schon Anderen aufgefallen ist; jedenfalls scheint uns eine neuere Publikation, welche wir Reusch in Bonn verdanken, einiges Licht in die Sache zu bringen.

---

78) *Nelli, Vita e commercio letterario di Galileo Galilei, nobile e patrizio Fiorentino, matematico e filosofo sopraordinario de' gran duchi di Toscana Cosimo e Ferdinando II,* Losanna 1793. S. 31 ff.

In dieser Arbeit, welche auch durch ihre konzisen Uebersichten über die neueren von Gherardi, Martin, Cantor, Wohlwill u. a. angestellten Galilei-Forschungen Interesse bietet*), weist nämlich Reusch[79]) an der Hand authentischer Aktenstücke nach, dass diese Korrespondenz des Verbannten von Arcetri mit den haeretischen Niederländern Anstoss in Rom erregt habe. Als nun wieder eine neue Sendung aus Amsterdam eintraf, verweigerte Galilei die Annahme, die Kurie belobte ihn wegen seines Gehorsams, und der Verkehr, welcher möglicherweise für die Förderung der maritimen Astronomie noch wichtige Früchte getragen hätte, fand ein rasches Ende.

IV. Zu §. 16. Wir erwähnten, dass in dem Zeitraum, welcher zwischen Galilei und Huyghens liegt, viele Versuche angestellt wurden, das primitive Zählwerk des Ersteren in einen wirklichen Zeitmesser umzuwandeln, dass aber keine derartige Verbesserung mit Huyghens' Erfindung zu vergleichen sei. Wie Bailly (s. o.) bemerkt, bestätigt das ein Kenner der physikalischen Technik jener Zeit, Johann Sturm, mit den Worten[80]): *„Ad Pendula seu Perpendicula Chronometra sermonem convertimus, instrumenti genus simplicissimum, et utilitatis tamen incredibilis (ut post dicenda docebunt) sive ipsa immediatè adhibeantur ad mensuranda tempora, quod primum fecerant Ricciolus eumque secuti aliqui etiam conatuum ejus ignari, Langrenus, Vendelinus, Mersennus, Kircherus et alii quam plurimi, sive Automatis Horologiis applicata eis desideratam hactenus perfectionem et aequabilitatem concilient, quod paucis abhinc annis Celeberrimi Hugenii industriâ praestitum"*.

V. Zu §. 16. Zu den in der vorhergehenden Note erwähnten Männern muss der Böhme Marek hinzugerechnet werden, von dessen hier in Frage kommendem Werke[81]) uns kürzlich Studnička eine ausführliche Analyse gegeben hat[82]). Interessant ist schon die Analogie, welche zwischen seinem Probleme *„Regulam construere ad celeritatem et tarditatem pulsuum absque errore metiendam"* und ähnlichen Bestrebungen des Sanctorius hervortritt. Worin das *„pulsilogium"* dieses letzteren eigentlich bestanden habe, ist allerdings, wie wir sahen, nicht völlig aufgeklärt; jedenfalls kommt

*) Nur Friedlein scheint etwas zu kurz gekommen zu sein; gerade weil seine Anschauungsweise ihm eine ziemlich isolirte Stellung zuwies, wäre eine Besprechung beziehungsweise Widerlegung seiner Sätze erwünscht gewesen.

79) *Reusch*, Der Galilei'sche Inquisitionsprozess. Sybel's Historische Zeitschrift, 17. Jahrg. 3. Hft. 80) *J. S. Sturm, Collegium experimentale, sive curiosum*, Norimbergae MDCLXXVI. S. 127 81) *J. M. Marci, De Proportione Motus seu Regula sphygmica. Ad celeritatem et tarditatem pulsuum ex illius motu ponderibus geometricis librato absque errore metiendam*, Pragae MDCXXXIX. 82) *Studnička*, Ueber Marcus Marci und seine Schrift *„De proportione motus"* überhaupt und die Gesetze des elastischen Stosses insbesondere, Prager Berichte, 9. April 1875.

die ungefähre Vorstellung, welche sich Schwenter[83]) von demselben macht, ganz auf das sphygmatische Monochord Marek's hinaus. „Daran schliesst er" — fährt Studnička (a. a. O.) fort — „als Parergon folgende mechanische Aufgabe: *Problema. Horologium construere, quod suo motu tempus numeret divisum in partes minores, quam tertias unius secundi,* worin er die Pendelbewegung als Zeitmesser benützt".

VI. Zu §. 17. Erst nach Beendigung unserer Arbeit wurden wir darauf aufmerksam, dass bereits zwei auf das nämliche Ziel gerichtete Bearbeitungen vorlägen. Die eine italienische rührt von Veladini her und ist 1854 in den Sammlungen des lombardischen Instituts erschienen, die andere hat den Franzosen Bouquillon zum Verfasser und ist in den vom „*Conservatoire des arts et métiers*" ausgehenden Publikationen niedergelegt. Beide Abhandlungen sind schwer zugänglich, aber glücklicherweise hat Albèri in seinen Supplementen zu der von ihm besorgten Ausgabe der Galilei'schen Werke einen genauen Ueberblick über die Resultate beider Historiker gegeben[84]).

Es ist nicht zu leugnen, dass diese Resultate im Wesentlichen ganz mit den unsrigen übereinstimmen; auch eine natürlich nahezu identische Zeichnung des Florentiner Zeitmessers findet sich vor. Allein auch nachdem wir nunmehr diese uns bisher unbekannt gebliebenen Fakta in Erfahrung gebracht, glauben wir gleichwohl durch unsere Darstellung des Galilei-Huyghens'schen Prioritätsstreites nichts Unnützes geleistet zu haben, denn erstens waren jene beide Abhandlungen, wie auch Albèri's Zusammenstellung, in Deutschland gewiss noch wenig bekannt, und zweitens dürften sich im Vorstehenden immerhin auch einige neue Momente finden.

Nur in Einem allerdings hochwichtigen Punkte weicht Veladini von der durch van Swinden und uns vertretenen Auffassung ab. Als echter Italiener und Verehrer des nationalen Heros kann er sich bei dem immerhin unvollkommen ausgefallenen Versuch Galilei's nicht beruhigen; für ihn unterliegt es keinem Zweifel, dass Galilei doch noch das so heiss erstrebte Ziel der gänzlichen Beseitigung menschlicher Hülfe erreicht habe, und da die Berichte nichts darüber melden, so hilft er durch eine allerdings sehr geistreiche „*Divinazione*" dem Mangel der Geschichte nach. Dass Galilei die in ihrer Genialität so überaus bequeme Ankerhemmung von Huyghens bei seinem Zählwerk nicht wohl zur Anwendung bringen konnte, leuchtet ein; Veladini legt sich demgemäss die Frage vor, durch welche Art von Hemmung in diesem konkreten Falle der betreffende Zweck erreicht werden könne[85]). Seine Idee ist nun diese: An dem Dorne Galilei's befindet sich ein Ansatz, welcher etwa in der Mitte des bezüglichen Zahnrades eine andere Zunge treffen kann, und diese ist wiederum auf der dem Aufhängepunkt des Pendels diame-

83) *Schwenter, Deliciae Physico-Mathematicae,* Nürnberg 1636. S. 415 ff.
84) *Albèri, Dell' orologio a pendolo di Galileo Galilei e di due recenti divinazioni del meccanismo da lui imaginato, Opere di Galileo Galilei, Supplemento,* Firenze 1856. S. 331 ff. 85) *Ibid.* S. 342.

tral gegenüberliegenden Seite des Zahnrades an einem Zapfen befestigt. Dieser nämliche Zapfen aber lässt eine eigene Kralle in den gezackten Rand des Stirnrades eingreifen, und so könnte allerdings ein gleichmässiger Gang ermöglicht werden, wenn wir uns noch die nöthigen Gewichte hinzudenken.

Diese Divination des italienischen Autors macht ihm selbst gewiss alle Ehre, aber historische Berechtigung hat sie nicht. Denn dem einzigen plausiblen Grunde, der sich für diese letztere anführen liesse — dem Umstande, dass der gezackte Rand des Stirnrades im Galilei'schen Modell hiedurch erklärt würde — stehen mit allzugrossem Gewichte die sämmtlichen zeitgenössischen Quellen gegenüber, deren absolutes Stillschweigen in dieser Richtung sicherlich seinen guten Grund hat.

Namen-Index.

Abel 66. 179.
Abraham ben David 295.
Abu ben David 307.
Adda 301.
Agrippa (v. Nettesheim) 215. 216. 217. 218. 249.
Albèri 343.
Albertus Magnus 305.
Alembert (D'Alembert) 41. 44. 55. 56.
Alexander 15.
Alfons (v. Castilien) 107.
Alfraganus 295.
Alkalsadî 102.
Alstedius 14.
Antiochus 15.
Apian 110.
Archimedes 36. 53. 62. 133. 277.
Aristoteles 12. 13. 22. 87.
Arnaud 232.
Arneth 29.
Arzachel 108.
Atelhart 2. 3.

Bachet (de Méziriac) 188. 204. 231. 232. 235. 249. 251.
Baco 292.
Bailly 329. 335.
Baldus 108.
Baltzer 20. 39. 48. 53. 54. 72. 84. 116.
Barbaro 10.
Barlaam 101.
Basnage 300.
Becher 322. 323. 328. 329. 333.
Becker 81.
Behaëddin 4.
Bernhardt 278.
Bernoulli (Daniel) 41. 44. 186.
Bernoulli (Jean) 143. 271. 279. 280. 281. 282. 284. 289.
Bernoulli (Nicolaus) 143.
Berthold 340.
Berthoud 312. 329. 335. 340.
Bertrand 38. 39. 74. 75. 79. 113.
Beyer 116.
Biot 276. 277. 278. 288. 289.
Blaeu 87.
Bode 335.
Boëthius 2.
Bois-Morand 334.
Boncompagni 40. 66. 103. 111. 113. 134. 137. 279.
Bouché 84.
Bouquillon 343.
Bousquet 137.
Bouvelles (Bovillus) 5. 6. 8. 10. 11. 23.
Bradley 39.
Bradwardin 3. 22. 23.
Bragelogne 155.
Brandes 252.
Brandis 287.
Braun 177. 180.
Brenna 324.
Bretschneider 290.
Broscius 21. 22. 23. 24. 25. 28. 86. 87. 88.
Bruhns 284.
Bruno (Giordano) 32.
Buckley 113.
Bücheler 96.
Bürgi 29. 30. 132. 133. 328. 329. 330. 331. 332. 335. 340.
Buffon 137.
Bullialdus (Bouillau) 321. 326. 333. 334. 337.
Burnet 334.
Buzengeiger 100.

Caesarius 87.
Camberousse 84.
Campanus 3. 5. 11.
Cantor 2. 3. 12. 40. 66. 98. 103. 106. 108. 109. 110. 111. 127. 129. 130. 133. 134. 220. 342.
Capito 251.
Caramuel (v. Lobkowitz) 331.
Carcavi 334.
Cardanus 53. 110. 111. 113. 114. 220.
Carnot 50. 55. 56. 90.
Carové 312.
Caselli 83.

Castillon 137. 143.
Cataldi 100. 111. 113.
Cauchy 64. 65. 66. 171. 186.
Cayley 75. 76. 78. 79.
Chambers 101.
Chasles 5. 10. 11. 14. 18. 21. 22. 24. 29. 32. 116. 152. 153. 155. 243. 277.
v. Claussberg 251.
Clavius 11. 12.
Clebsch 91. 92. 136. 156. 171. 179.
Cnollen 304.
Collins 137.
Collinson 255.
Colson 137. 142.
Columbus 2. 109.
Copernicus 27. 109. 110.
Coprinus 87.
Cosimo (v. Medici) 341.
Cotes 187.
Craghe (Krag) 333.
Cramer 136. 143. 146. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 170. 171. 175. 178. 180. 185.
Curtze 3. 86. 88. 109. 115. 186.
Cusa (Cardinal von) 5.
Czartoryski 87.

Dalby 256.
Dati 326.
De Gua 153. 154. 166.
De la Hire 189. 194. 195. 234. 239. 240. 241. 242. 244. 263.
Delambre 277. 287. 288. 306.
Del Monte (Marchese Ubaldo) 311.
Descartes (Cartesius) 53. 153. 340.
Des Noyers 337.
Dienger 63.
Dieterici 192, 266.
Diodati 316.
Diophant 120.
Doms 328. 329. 332.
Doppelmayr 229. 309.
Drach 263.
Druckenmüller 82. 120. 125. 126. 127. 134. 135.
Dubois 273.
Dürer 215. 216. 219.
Duller 340.

Eduard VI. (von England) 113.
Egen 53.
El-Bouni 192.
Eratosthenes 175.
Ersch 295.
Esra 297.
Euclides 2. 5. 11. 12. 22. 28. 53. 87. 101.
Euler 41. 44. 53. 54. 55. 56. 65. 74. 76. 100. 161. 165. 186. 252. 253. 254. 255. 259. 260. 261. 263. 269. 279. 289. 290.
Eutokius 94. 95.
v. Eye 215.

Fabroni 324.
Favaro 134. 279. 300.
Faulhaber 30. 227. 229. 230.
Ferdinand II. (von Toscana) 317. 341.
Felsenthal 307.
Fibonacci (Leonardo Pisano) 40. 103. 105. 106. 127. 129. 130.
Fiedler 181.
Förster 32.
Foucault 331.
Foucher de Careil 53.
Fränkel 293.
Franclin 255. 256.
Frénicle (de Bessy) 234. 236. 237. 238. 239. 240. 250. 263.
Friedlein 96. 97. 103. 104. 105. 106. 342.
Frisch 26. 116. 118. 132.
Frischlin 12.
Frisi 322. 324.
Frontinus (Julius) 96. 97.

Galilei (Galileo) 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 331. 333. 335. 336. 339. 340. 341. 342. 343. 344.
Galilei (Vincenz) 318. 319. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 339. 341.
Gardiner 279.
Gauss 29. 49. 50. 55. 91. 135. 283. 284. 288.
Gehler 252. 276. 310. 327.
Geiger 293. 307.
Gerhardt 101. 195. 196. 267. 336.
Gergonne 54.
Geulinx 340.
Gherardi 342.
Girard 17. 18. 19. 20. 21. 24. 25. 40. 41. 49. 60. 114.
Glaisher 120.
Gleim 186.
Gordan 179.
Gourjon 75.
Grässe 194.
Gregory 181.
Gruber 295.
Gruner 27.
Grunert 113. 124.
Günther 1. 2. 3. 14. 28. 30. 57. 100. 102. 112. 128. 154. 155. 180. 186. 204. 214. 227. 240. 308. 329. 331.
Guison 321. 326.

Hamburger 178.
Hankel 1. 2. 69. 95. 98. 102. 106. 129. 185. 186. 281. 310. 328.
Harriot 187.
Harris 310.
Harvey 334.
Hausen 151.
Heinen 82.
Heinrich v. Wyk 309.
Heinsius 326.
Heis 120. 125. 128.
Heller 215.
Helmholtz 54.
Henisch 131. 229.
Henlein (Hele) 309.
Hermann 286.
Hermes 71. 72. 73. 74.
Herschel 39.
Herwart (v. Hohenburg) 116.
Hess 85. 86.
Hessel 54. 85.
Hevel 336. 337. 338. 339. 340.
Hillel 300.
Hindenburg 246. 252. 254. 285.
Hipparch 301.
Hoefer 272.
Hohndell 258. 259.
Holland 144.
Hooke 296. 340.
Horner 263.
Hortensius 316.
Hugel 260. 261. 263.
v. Humboldt (A.) 283. 284. 287. 288. 296. 310.
Huyghens 308. 309. 310. 317. 318. 321. 322. 323. 324. 326. 327. 328. 331. 333. 334. 335. 337. 338. 339. 340. 342. 343.

Jacobi (C. F. A.) 11.
Jacobi (C. G. J.) 66. 70. 71. 72. 73.
Jahn 213.
Jamnitzer 35. 36. 88.
Ibn Junis 310.
Ibn Khaldoun 191.
Ideler 293.
Jehuda 295.
Johannes (Hispalensis) 103. 106. 107. 111.
Jordan 81.
Isaschar 94.
Juda I. 297.

Kästner 5. 13. 14. 18. 21. 25. 86. 88. 89. 101. 109. 110. 113. 115. 137. 142. 143. 144. 145. 146. 151. 153. 156. 168. 182. 185. 186. 187. 230. 252. 274. 275. 276. 279. 287. 288.
Kant 185.
Karl V. 340.
Karsten (G.) 309.
Karsten (W.) 187. 274. 275.
Kausler 279.
Keill 290.
Kepler 14. 16. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 38. 39. 40. 55. 57. 62. 63. 116. 117. 118. 132. 133. 187.
Kersey 116.
Kinckhuysen 136.
Kircher 15. 16. 232. 233. 234. 236. 342.
Klein 179. 180.
Klügel 187. 258. 279.
Knorr (von Rosenroth) 268.
Kochanski 250. 261.
Krafft 134.
Kramp 285.
Krause 66. 67. 68. 69. 83.
Kuckuck 133.
Kühn 41.
Kunze (A.) 126. 127.
Kunze (L.) 21.

Lacroix 178.
Lagrange 89. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 127. 128. 178. 182. 186. 281. 289.
La Loubère 188. 189. 191. 249.
Lambert 41. 122. 123. 125. 127. 143.
Lange 270.
Langren 336. 342.
Lassen 188.
Lauremberg 88.
Leibnitz 143. 334. 336. 340.
Lemkes 118. 128.
Leonelli 283. 288.
Leopold (von Toscana) 321. 322. 325.
Lepsius 98.
Lessing 186.
Leuwenhoeck 296.
Levi ben Chabib 295.
Lexell 49.
L'Huilier 48. 54.
Libri 311. 316. 318.
Lidonne 62.
v. d. Linde 266.
Liouville 177.
Lissajous 177. 180.
Listing 56. 81.
v. Littrow (C.) 291. 292. 295. 297. 298. 303. 306. 307.
v. Littrow (J. J.) 243. 310. 327. 340.
Lochner 229.
Lorenz 252.
Ludlam 289.

Mädler 108. 293. 306.
Magalotti 323. 325.
Magliabecchi 326.
Maier (Chr.) 269.
Maimonides (Moses ben Maimon) 292. 295. 302. 203. 305. 306. 307.
Malezieu 249.
Malfatti 271.
Marek (Marci) 342. 343.
Maria (v. Medici) 334.
Martin 98. 342.
Martins 317.
Marx 35.
Matthiessen 17. 125. 126. 128.
Matzka 328.
Maupertuis 47. 168.
Maurolycus 52.
Mayer (Tob. I.) 39. 42. 133. 296.
Mayer (Tob. II.) 143.
Meister 8. 14. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 52. 67. 68. 70. 72. 79. 80.
Mersenne 336. 342.
Metius 120.
Meton 300. 301.
Micanzio 313. 316.
Michelsen 165.
Mill 298.
Minding 178. 181.
Möbius 50. 51. 66. 70. 72. 78. 79. 80. 81. 84. 91.
Mohamed ben Musa 103.
Moigno 83.
Moivre 187.
Molinet 268.
Mollame 129.
Mollweide 189. 204. 209. 212. 219. 220. 257. 258. 269. 275. 276. 277. 279.
Montucla 226. 272. 277.
Moret-Blanc 112.
Morgan 178. 181. 273.
Moschopulos 194. 195. 203. 204. 210. 212. 214. 216. 217. 218. 220. 227. 229. 232. 233. 235. 247. 248. 249. 252. 258. 259. 261. 264. 267.
Mouton 336.
Müller (J. W.) 252.
Müller (Tr.) 52.
Muir 83.
Muncke 256.
Murmureus 195.
v. Murr 309.
Muschel (von Moschau) 284. 285. 286. 288. 290.

Nagler 215.
Napier (Neper) 87. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 288. 289. 328.
Neil 169.
Nelli 317. 321. 340. 341.
Nesselmann 4. 94. 95. 99. 129. 199. 209. 277. 293.
Neumann 27.
Newton 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 165. 166. 171. 174. 178. 180. 181. 182.
Nicolaus (Rhabda) 196. 267.

Obadja ben David 295.
Ofterdinger 134. 230.
Ohm 53.
Olbers 187.
Oldenburg 143.
Ons-en-Bray 234. 246. 247. 258. 259.
Oresme 115.
Ossolmski 87.
Ozanam 249. 250.

Pacioli (Lucas de Burgo) 5. 88. 113.
Paget 337.
Pagni 84.
Palaeologus 194.
Paracelsus (von Hohenheim) 14. 37. 215. 216. 217.
Pauli 194.
Pediasimus 194.
Peletarius (Peletier) 11.
Perelli 324.
v. Pessl 204. 264. 266.
Petricovius 87.
Peurbach 108. 109.
Pezenas 279.
Pfaff (C. H.) 284.
Pfaff (J. F.) 283. 284.
Pfeiffer 148. 165.
Philipp (von Hessen) 116.
Pihan 97.
Planudes (Maximus) 101. 194. 195. 267.
Plato 290.
Plücker 136.
Pözinger 290.
Poggendorff 21. 101. 271. 284. 301. 309. 323.
Poignard 234. 239. 240. 259.
Poinsot 23. 29. 32. 34. 38. 39. 48. 51. 52. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 66. 68. 70. 74. 75. 76. 77. 79. 82.
Polybius 87.
Praetorius 116. 132.
Psellus 194.
Ptolemaeus 30. 98. 101. 109. 301.
Puiseux 136. 165. 171. 172. 173. 175. 176. 177. 180. 182.
Pythagoras 1. 2.

Quetelet 114.

Rallier des Ourmes 234. 248.
Ramler 186.
Ramus 12. 13. 14. 22. 23. 87. 110. 220.
Realis 313.
Recorde 116.
Regiomontanus 2. 3. 108. 109. 110.
Reisch 10.
Reiss 59.
Reitlinger 27.
Remmelin 229. 230.
Reusch (F. E.) 89. 90.
Reusch (F. H.) 341. 342.
Reuss 252. 269.
Rheticus 110.
Rhind 95.
Ricci 325.
Riccioli 335. 342.
Riemann 44. 54. 171. 179. 180. 186.
Riese 218. 219. 232.
Rixner 14. 27.
Rocolet 312.
Römer 333.
Rohlfs 251.
van Romen (Adrianus Romanus) 29. 87. 115.
Roth 229.
Rothmann 329. 330. 335.
Rudolph II. 328. 329. 332.

Salmon 181.
Sammonicus 213.
Samuel 301. 302.
Sanctorius 310. 311. 340. 341. 342.
Sauveur 234. 243. 244. 245. 246. 253. 260. 261. 263.
Schellig 90.
Schering 91.
Schiel 298.
Schleupner 118. 134.
Schlömilch 128. 135. 151.
Schöll 296.
Schönborn (Erzbischoff) 329.
Schönemann 82.
Schoner 109.
Schott 234. 268.
Schröder 68. 69.
Schumacher 50.
Schwarz 94. 293. 294. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 306. 307.
Schwenter 17. 229. 249. 343.
Schwerd 90.
Seidelin 54.
Serret 178. 181.
Setonus 114.
S'Gravesande 143.
Siber 14. 217.
Simon Jacob 118.
Simson (Rabbiner) 304.
Simson (Robert) 53.
Slonimski 293. 294. 300. 301. 302. 306. 307.
Sneeberger 331.
Sohncke 5. 152. 243. 277.
Sparagna 1. 57. 100.
Spinola 229.
v. Staudt 56.
Steinhauser 82. 83.
Steinschneider 108. 292. 293. 295. 306. 307.
Stern (M.) 109. 478.
Stern (W.) 294. 304.
Stevin 114. 115. 116.
Stifel 32. 110. 130. 131. 218. 220. 221. 223. 226. 227. 228. 229. 233. 236. 242. 251. 255. 258. 259.
Stirling 143. 153. 154.
Strauss 12.
Studnička 342. 343.
Sturm 335. 342.
Suter 109.
van Swinden 11. 308. 317. 320. 321. 322. 324. 325. 327. 328. 329. 332. 333. 334. 335. 337. 339. 340. 343.
Sybel 342.

Targioni-Tozzetti 326.
Tartaglia 53. 220.
Taylor 177. 182. 184.
Terquem 29. 35. 58. 59. 62. 63.
Theodorus 196.
Theon 99. 100. 101. 102.
Thibaut 271.
Thomas (Aquinas) 305.
Thompson 262. 263.
Tiraboschi 324. 325.
Titze 194.
Treffler (Trifler) 317. 322. 324. 325. 326. 327. 328.
Tycho de Brahe 87. 309. 329. 232. 333. 335.

Unferdinger 83.

Valson 66.
Vandermonde 55. 56.
Vauban 88.
Veladini 343.
Victorius 97.
Vieth 89. 251.
Vieta 137. 187.
Vincent 188.
St. Vincenz (Gregorius a) 273.
Viviani 324. 325. 340.
Vogt 317.
Vorsterman van Oyen 18.

Wackerbarth 272. 273. 274. 288.
Wallis 5. 108. 114.
Walter 309.
Wargentin 271.
Whewell 243. 340.
Weidler 306.
Weiss 331.
Wendelin 336. 342.
Wenzelides 269. 270.
Wertheim 181.
Westphal 336.
Wiegleb 89.
Wieland 186.
Wiener 36. 39. 57. 61. 77. 78. 79. 83.
Wilhelm V. (von Hessen) 329.
Wing 110.
Wingate 110.
Wiszniewski 86.
Wöpcke 113.
Wohlwill 342.
v. Wolf (Chr.) 101. 187. 286. 288.
Wolf (J. C.) 301.
Wolf (R.) 84. 132. 137. 328. 329. 330. 331. 335.
Wusiński 87.

Zeissberg 86.
Ziegler 2. 108.
Zöllner 313.
Zuckermandel 258. 259.
Zunz 304.

Berichtigungen und Zusätze.

S. 2 Z. 2 v. u. statt Copernicus l. Columbus.

S. 20 Z. 8 v. u. statt „keine mehrfachen“ l. „keine mehr als zweifachen“.

S. 29 Z. 7 v. u. nach „dass“ ergänze: „natürlich nur für die Ordnungszahlen < 15, auf die er sich beschränkte“.

S. 43 Z. 16 v. o. nach „summire“ ergänze „algebraisch“.

S. 46 Z. 1 und 3 v. o. statt 9 l. q. Z. 15. u. 17 v. u. statt Ordnungszahl l. Artenzahl.

S. 57 Z. 11 v. u. statt $\frac{3}{2}$ l. $\frac{6}{2}$.

S. 58 Z. 18 v. o. statt „erniedrigt“ l. „erhöht“.

S. 72 Z. 18 v. u. l. „den Bestandtheilen 1 (ohne inneres Fünfeck) und 4 der Koëffizient 1, dem Bestandtheil 2 der Koëffizient 2, dem Bestandtheil 3 der Koëffizient (— 1) zukommen“.

S. 73 Z. 9 v. o. statt vier l. sechs.

S. 80 Z. 14—17 v. o. Die Fassung der Regel könnte zu dem Missverständniss verleiten, als ob lediglich vom Perimeter einer einzelnen Zelle deren Vorzeichen abhänge, und substituiren wir deshalb folgende: „Gehört eine beliebige Flächenzelle als Theil zu einem grösseren Flächenstück, von dem lediglich das äussere bezüglich innere Ufer schattirt ist, so erhält dieselbe das positive resp. negative Zeichen. Eine Zelle, deren Perimeter (entsprechend fortgesetzt) theilweise zu einem positiven, theilweise zu einem negativen Flächenstück gehört, muss folgerichtig gleich Null gesetzt werden“. Eine Reihe vortrefflicher Uebungsbeispiele zur Anwendung dieser Regel enthält übrigens Cremona's von Curtze übersetztes Werk „Elemente des graphischen Calculs“, Leipzig 1875 (S. 11—17).

S. 83. Die von Muir gefundene und im Texte wiedergegebene Relation $\Pi_{p^m} = \sqrt{p}$ ist nicht eigentlich neu, sondern, wenn auch allerdings in wesentlich anderer Formulirung, auf Gauss zurückzuführen (Werke ed. Schering, 2. Band, S. 26).

S. 88 Z. 13 v. o. statt Jamitzer l. Jamnitzer.

S. 102. Neben Al Kalsadî wäre auch noch Abul Wafa aus Djoueïn hier zu nennen gewesen, welcher nach Marre (Bull. Bonc. Tomo VII, S. 269) bei Auflösung einer linearen Textgleichung die Unbekannte in der Form

$$3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

darstellt, ganz ähnlich wie Nicomachus im 6. Probleme seiner *εἰσαγωγὴ ἀριθμητικά* (ed. Hoche)

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

setzt. Auch der Byzantiner Pediasimus benützt die aufsteigenden Kettenbrüche bei Divisionen (Friedlein, Die Geometrie des Pediasimus, Ansbach 1866, S. 19).

S. 112 Z. 11 u. 13 v. u. zwischen den Klammern statt — l. +.

S. 116 unterste Zeile statt Vol. II. l. Vol. VII. und dann: Ibid. S. 9, Ibid. S. 304, Ibid. S. 306.

S. 132 Z. 18 v. u. statt Burgi l. Bürgi.

S. 135 Z. 12 v. u. statt 20 l 21.

S. 139 Z. 4 v. o. nach „Drehung" ergänze: „und mache den Punkt zum Mittelpunkte einer neuen"; Z. 6 l. „Anfangs- und Endlage".

S. 152. Zu der hier ausgesprochenen Vermuthung, Newton habe sein Parallelogramm auch in die Kurventheorie hineingetragen, scheint sich auch Baltzer (Leipziger Berichte 1873, S. 27) zu bekennen.

S. 176 Z. 7 v. o. statt $M\eta$ l. M_η.

S. 182 Z. 18 v. o. nach „Differentialquotienten von y" ergänze: „multiplizirt mit $(\dot{x})^n$".

S. 195 Z. 20 v. o. das zweitemal statt Moschopulos l. Moschopolos.

S. 208 Z. 8 v. u. satt $= 12q$ l. $+ 12q$.

S. 231 Z. 18 v. u. statt „beanspruchen" l. „beeinträchtigen".

S. 244 Z. 2 v. u. statt „*cursiva*" l. „*curiosa*".

S. 252. Z. 14 v. u. statt Brandes l. Muncke.

S. 259. Die Art und Weise der Bestimmung des Mittelfeldes kann man der in unserer Aufzählung unerwähnt gebliebenen Abhandlung „*Solution d'un problème d'arithmétique*" von Lionnet entnehmen (Annal. de mathém. par Terquem et Gérono, T. II., S. 446). Nachträglich sei bemerkt, dass eine in der Notiz „Verschiedene mathematische Bemerkungen und Aufgaben" von Clausen (Archiv d. Math. u. Phys. 21. Theil, S. 97) gestellte Frage bezüglich der magischen Quadrate einfachster Natur in den Entwickelungen der §§. 19 ff. ihre Erledigung findet.

S. 261 Z. 3 v. u. statt Koschanski l. Kochanski.

S. 263 Z. 3 v. o. statt 87 46 45 . . . l. 37 46 45 . . .

S. 265 Z. 6 v. u. ist das Wort „schattirten" zu streichen.

S. 268 Z. 11 v. u. statt „*du*" l. „*de*".

S. 270 Z. 4 v. o. statt $\frac{n^2}{2}$ l. $\binom{n^2}{2}$.

S. 329 Z. 1 v. o statt 112 l. 122.

S. 330 Z. 1 v. o. nach „zu der ihm" ergänze: „von der historischen Kommission".

Die Lehre vom Newton'schen Parallelogramm etc. wird in den während des Druckes dieses Werkes im gleichen Verlage erschienenen Vorlesungen von Clebsch ausführlich abgehandelt und zwar mit Beifügung einer wenn auch kurzen so doch sachgemässen historischen Einleitung; immerhin wird die dortselbst gegebene streng dogmatische Darstellung unsere historisch-genetische Entwickelungsskizze nicht überflüssig machen.

Eschebach & Schaefer, Leipzig

Fig. 1.

α	α	α
α	α	α
α	α	α

Fig. 2.

	ιε	ιε	ιε
ιε	Δ	Θ	β
ιε	ϝ	ε	ς
ιε	η	α	$\bar{\varsigma}$

Fig. 3.

ξε	ξε	ξε	ξε	ξε	ξε
ξε	ια	$\bar{\varkappa}\delta$	ξ	κ	ϝ
ξε	$\bar{\delta}$	$\bar{\iota}\beta$	κε	η	ιζ
ξε	ιξ	ε	ιϝ	κα	ϑ
ξε	ι	ιη	α	ιδ	κβ
ξε	κϝ	ς	ιθ	β	ιε
	ξε		ε		ξε

Fig. 4.

ρος							ρος
	κβ	μξ	ιζ	μα	ι	λε	Δ
ρος	ε	κϝ	μη	ιξ	μβ	ια	κθ
ρος	λ	ς	$\bar{\varkappa}\delta$	μθ	ιη	$\bar{\lambda}\varsigma$	ιβ
ρος	ιϝ	λα	ξ	κε	μϝ	ιθ	λξ
ρος	λ	ιδ	λβ	α	κς	$\bar{\mu}\delta$	κ
ρος	κα	λθ	η	λϝ	β	κξ	με
ρος	μς	ιε	μ	θ	λδ	ϝ	μη
	ρος	ρος	ρος	ρος	ρος	ρος	ρος

ξ

Fig. 5.

	λξ	οη	ο	κα	ξβ	ιϝ	νδ	ε	κθ
	ς	λη	οθ	λ	οα	κβ	ξϝ	ιδ	με
	με	ξ	λθ	π	λα	οβ	κϝ	νε	ιε
	ιζ	μη	κ	μ	πα	λβ	ξδ	κδ	νζ
θ	νξ	ιξ	μθ	θ	μα	οϝ	λϝ	ξε	κε
	κς	νη	ιη	ν	α	μβ	οδ	λδ	ξς
	ξς	κξ	νθ	ι	να	β	μϝ	οε	λε
	λζ	ξη	ιθ	ξ	ια	νβ	ϝ	μδ	οζ
	οξ	κη	ξθ	κ	ξα	$\bar{\iota}\beta$	νϝ	δ	με

Fig. 6.

			ιε
ιε	η	α	ς
ιε	ϝ	ε	ξ
ιε	δ	θ	β

Fig. 7.

					ξε
ξε	ι	ιη	α	$\bar{\iota}\delta$	κβ
ξε	δ	ιβ	κε	η	ιζ
ξε	κϝ	ς	ιθ	β	ιε
ξε	ιζ	ε	ιϝ	κα	θ
ξε	ια	κδ	ζ	κ	ς

Eschebach & Schaefer, Leipzig.

8.

κζ	μδ	κ
μβ	ια	κθ
β	κξ	με
ιη	λζ	ιβ̄
λδ	γ	κη
μζ	ιθ	λξ
ι	λε	Δ

μερ

μερ

ξθ

ξθ

Eschebach & Schaefer Leipzig.

Fig. 11.

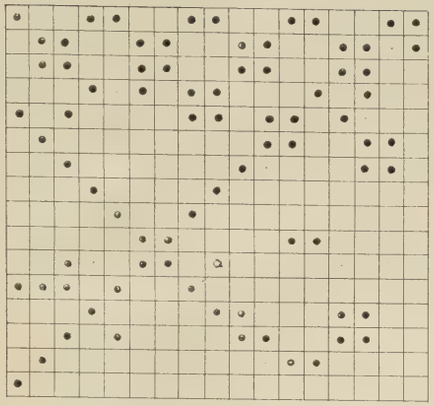


Fig. 14.

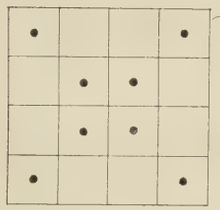
α			η	ϑ			ιϛ
	ξ	β			ιε	ι	
ϛ			ϝ	ιδ			κα
	Δ	ε			ιβ	ιϝ	
ιξ			$\bar{κ}δ$	κε			λβ
	κϝ	ιη			λα		
κβ			ιθ	λ		κϛ	κξ
	κ	κα			κη	κθ	

α	ξβ	νθ	η	θ	νδ	να	ιϛ
ξ	ξ	ξα	β	νβ	ιε	ι	νϝ
ϛ	νξ	ξδ	ϝ	ιδ	μθ	νϛ	κα
ξτ	Δ	ε	νη	νε	ιβ	ιϝ	μ
ιξ	μϛ	μϝ	κδ	κε	λη	λε	λβ
μδ	κϝ	ιη	με	λϛ	λα	κϛ	λξ
κβ	μα	μη	ιθ	λ	λϝ	μ	κξ
μξ	κ	κα	μβ	λθ	κη	κθ	λΔ

Fig. 8.

λη	ιδ	λβ	α	κϛ	μδ	κ
ε	κϝ	μη	ιξ	μβ	ια	κθ
κα	λθ	η	λϝ	β	κξ	με
λ	ϛ	κδ	μθ	ιη	λϛ	$\bar{ιβ}$
μϛ	ιε	μ	θ	λδ	ϝ	κη
ιϝ	λα	ξ	κε	μϛ	ιθ	λξ
κβ	μξ	ιϛ	μα	ι	λε	Δ

Fig. 12.



$\bar{λδ}$	λδ	λδ	$\bar{λδ}$	
α	ιε	ιδ	Δ	$\bar{λδ}$
ιβ	ϛ	ξ	ϑ	λδ
η	ι	ια	ε	$\bar{λδ}$
ιϝ	ϝ	β	ιϛ	λδ

Fig. 10.

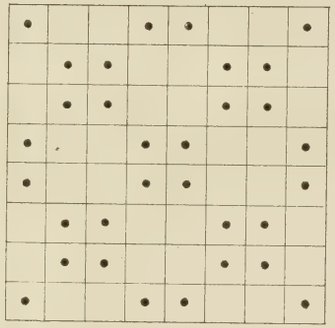


Fig. 13.

ξθ	ξμ	ξν	ξμ	
α	ιδ	ια	η	μξρ
ιβ	ξ	β	ιϝ	μξρ
ϛ	ϑ	ιϛ	ϝ	ξθ
ιε	Δ	ε	ι	ξθ

Fig. 16.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Fig. 15.

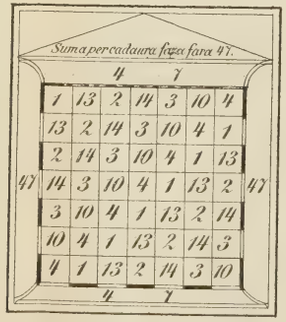
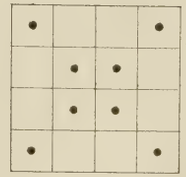
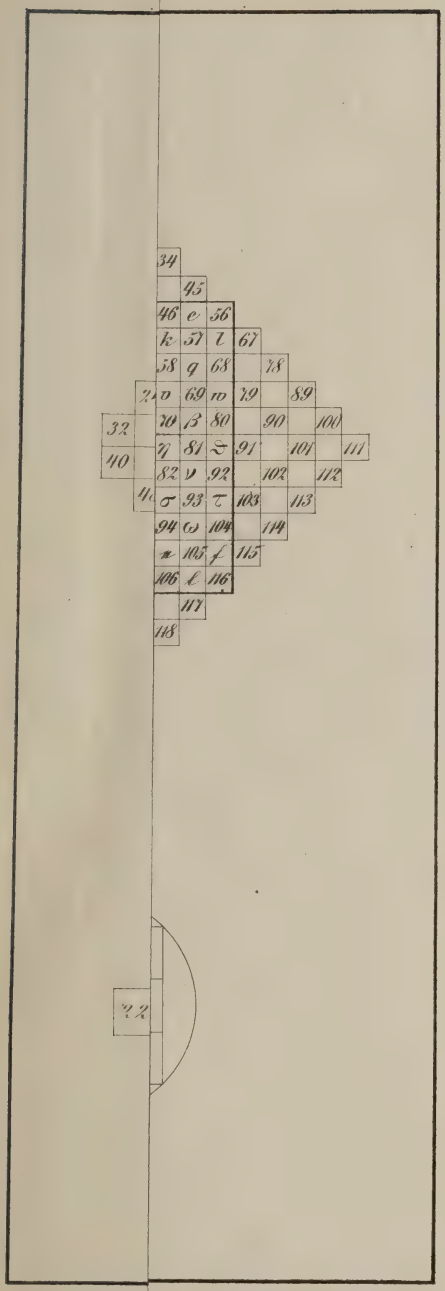


Fig. 9.





Eschebach & Schaefer, Leipzig

Fig. 18.

	9			12	13			16	17			20	21		2
3			45	46			49	50			53	54		32	
4	33		63			66	67			70	71		58		
	34	59			89	90			93	94		80			5
		60	81		101			104	105		98			35	6
7			82	99			117	118		112			61	36	
8	37	62		100	113	136	123	122	133			83			
23	38	73		107	114	129	126	121	132			84			
24			85	108	115	125	130	131	128				74	39	
		75	86			124	135	134	121	119	109			40	25
	41	76	87			116			120	111	110				26
27	42					102	103			106	97	95	77		
28	43			88			91	92			96	79	78		
				64	65			68	69			72	57	55	29
		44			47	48			51	52			56	31	30
		10	11			14	15			18	19			22	1

Fig. 19.

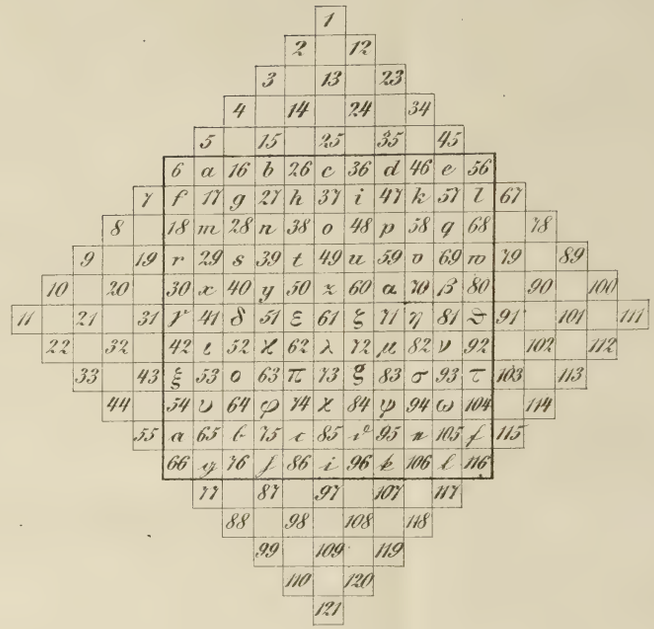


Fig. 20.

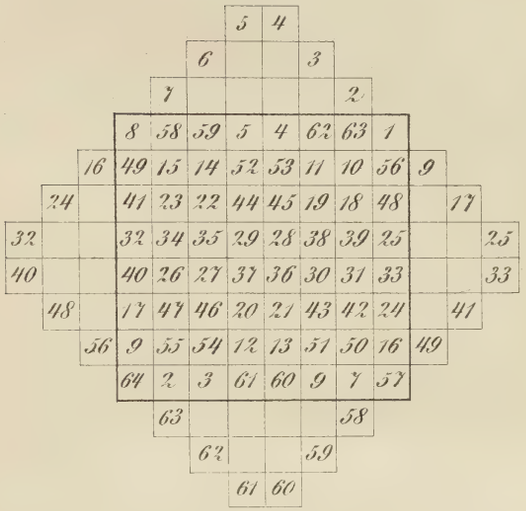


Fig. 22.

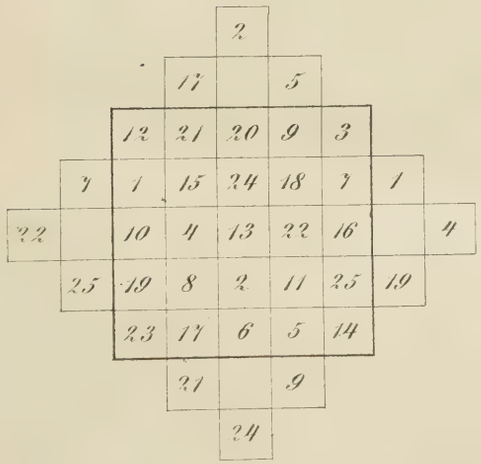


Fig. 21.

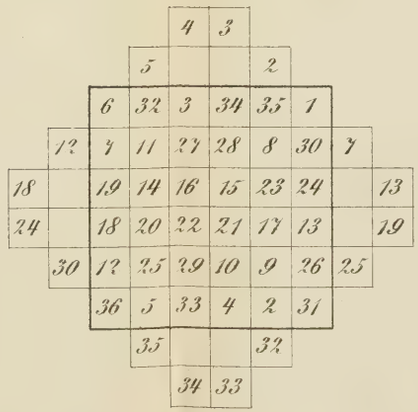
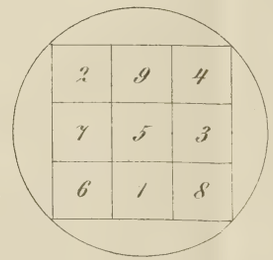


Fig. 17.



Eschebach & Schaefer, Leipzig.

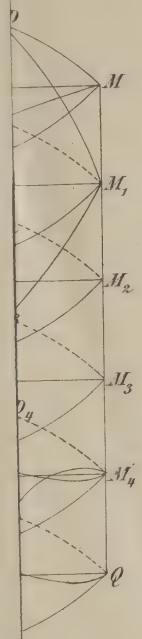


Fig. 26.

3	113	112	111	74
4	65	66	52	87
0	38	34	57	109
5	20	44	59	89
9	27	45	61	101
21	29	47	68	91
9	32	50	70	105
3	166	148	128	104
22	167	149	130	94
28	169	151	135	95
2	178	155	137	101
7	159	164	139	100
3	132	131	146	99
4	84	85	86	124

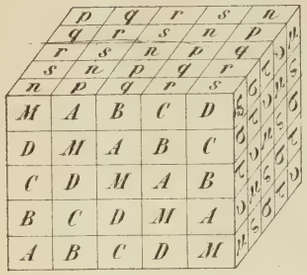
Fig. 23.

Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Fig. 27.

2	11	58	51	30	39	54	15
59	50	3	12	53	14	31	38
10	1	52	57	40	29	16	55
49	60	9	4	13	36	37	32
64	5	24	45	36	41	28	17
23	48	61	8	25	20	33	42
6	63	46	21	44	35	18	27
47	22	7	62	19	26	43	34

Fig. 24.



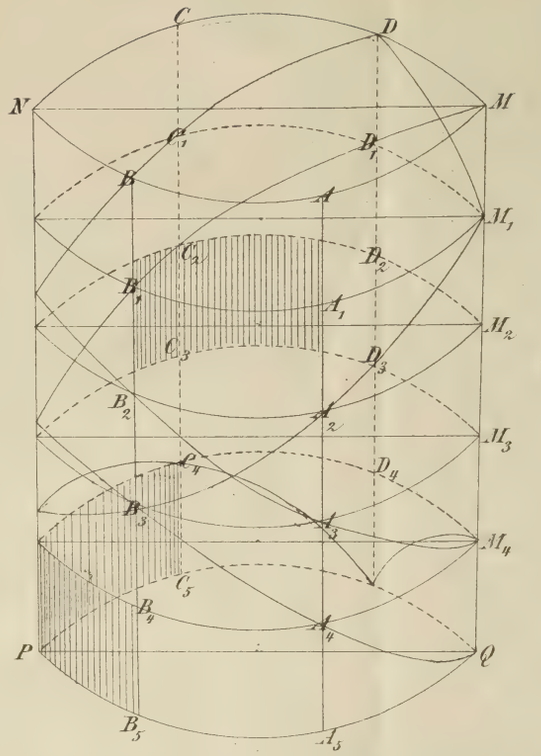


Fig. 26.

Fig. 25.

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	181
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	241	206	179	174	197	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	20	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

73	75	76	77	119	118	117	116	115	83	113	112	111	74
110	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	87
88	140	33	162	161	160	158	156	43	40	38	34	57	109
108	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	89
90	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	107
106	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	91
92	127	147	165	180	192	6	7	189	11	32	50	70	105
93	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	104
103	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	94
102	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	95
96	60	42	171	21	22	23	24	171	172	178	155	137	101
97	58	163	35	36	37	39	41	154	157	159	164	139	100
98	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	99
123	122	121	120	78	79	80	81	82	114	84	85	86	124

Fig. 23.

Eschebach & Schaefer, Leipzig.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.9G95V C001
VERMISCHTE UNTERSUCHUNGEN ZUR GESCHICHTE
3 0112 016892108